

Révisions de première année — Probabilités

Dans ce document, la lettre Ω désigne un univers fini et P une mesure de probabilité sur Ω .

1 Probabilités conditionnelles

Définition 1 Soient A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$. On appelle *probabilité conditionnelle* de B sachant A le réel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple 1 On lance un dé bien équilibré. Soient A l'événement « le numéro obtenu est supérieur ou égal à 2 » et B l'événement « le numéro obtenu est impair ».

- Calculer la probabilité que le numéro obtenu soit supérieur ou égal à 2, ainsi que la probabilité que le numéro obtenu soit impair.
- Calculer la probabilité que le numéro obtenu soit supérieur ou égal à 2 et impair.
- Calculer la probabilité que le numéro obtenu soit impair, sachant qu'il est supérieur ou égal à 2.
- Calculer la probabilité que le numéro obtenu soit supérieur ou égal à 2, sachant qu'il est impair.

2 Formule des probabilités composées

La proposition ci-dessous est une conséquence directe de la définition.

Proposition 1 Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. On a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple 2 On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire successivement et sans remise deux cartes de ce jeu. Soient T_1 l'événement « la carte obtenue au premier tirage est un trèfle » et T_2 l'événement « la carte obtenue au second tirage est un trèfle ». Calculer la probabilité d'obtenir deux trèfles.

Proposition 2 (formule des probabilités composées) Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exemple 3 Une urne contient six boules : quatre rouges et deux blanches. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne. Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note R_k l'événement « la boule obtenue au k -ème tirage est rouge » et B_k l'événement « la boule obtenue au k -ème tirage est blanche ».

- Calculer la probabilité d'obtenir trois boules rouges.
- Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage, une boule blanche au deuxième tirage et une boule rouge au troisième tirage.

3 Formule des probabilités totales

Définition 2 On dit que des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un *système complet d'événements* lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Exemple 4 On lance un dé. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les événements $A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{2, 4, 5\}$ et $A_3 = \{6\}$ forment un système complet d'événements.

Exemple 5 On lance une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'on obtient pile et la valeur 0 sinon. Les événements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ forment un système complet d'événements.

Proposition 3 (formule des probabilités totales) Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements et B un événement. On a

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B).$$

Si de plus tous les A_i sont de probabilités non nulles, alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \times P_{A_i}(B).$$

Exemple 6 Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre. Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas. Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6. On choisit un jour au hasard. On note A l'événement « le jour choisi est pluvieux » et V l'événement « Zoé se rend à son travail en voiture le jour choisi ».

- Calculer la probabilité que le jour choisi, Zoé se rende à son travail en voiture.
- Calculer la probabilité que le jour choisi soit pluvieux, sachant que Zoé se rend à son travail en voiture.

Exemple 7 Trois usines fabriquent un même objet, à hauteur de 30 %, 30 % et 40 % de la production totale. Dans ces usines, la proportion d'objets fabriqués défectueux est respectivement de 4 %, 3 % et 2 %. On prélève un objet au hasard dans la production totale. Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note U_k l'événement « l'objet prélevé est fabriqué par la k -ème usine » et D l'événement « l'objet prélevé est défectueux ».

- Calculer la probabilité que l'objet prélevé soit défectueux.
- Calculer la probabilité que l'objet prélevé provienne de la première usine, sachant qu'il est défectueux.

4 Exercices

Exercice 1 Pour prévenir deux maladies A et B chez les bovins d'un cheptel, on effectue des tests sur un échantillon suffisamment important. Les résultats montrent que

- 5 % des bovins présentent la maladie A ;
- parmi les bovins atteints de la maladie A , 20 % ont la maladie B ;
- parmi les bovins non atteints de la maladie A , 3 % ont la maladie B .

On choisit au hasard un bovin dans ce cheptel et on considère les événements A : « le bovin présente la maladie A » et B : « le bovin présente la maladie B ».

- Traduire les données de l'énoncé à l'aide de probabilités.
- Quelle est la probabilité que le bovin présente les deux maladies ?
- Quelle est la probabilité que le bovin présente la maladie B ?
- Le bovin choisi au hasard présente la maladie B . Quelle est la probabilité qu'il présente la maladie A ?

Exercice 2 Le secteur de production d'une entreprise est composé de trois catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production ;
- les agents de maintenance.

Il y a 10 % d'ingénieurs et 70 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 30 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production. On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On considère les événements

- I : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
 - O : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
 - M : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
 - F : « le personnel interrogé est une femme ».
1. Calculer la probabilité d'interroger :
 - a. un agent de maintenance ;
 - b. une femme agent de maintenance ;
 - c. une femme.
 2. On interroge une femme. Quelle est la probabilité qu'elle soit un agent de maintenance ?

Exercice 3 Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongoir. On a observé que

- si le manchot choisit le toboggan, alors la probabilité qu'il le reprenne est $\frac{3}{10}$;
- si le manchot choisit le plongoir, alors la probabilité qu'il le reprenne est $\frac{4}{5}$.

Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère les événements T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n -ième passage » et G_n : « le manchot utilise le plongoir lors de son n -ième passage ». On considère alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = P(T_n)$.

1. a. Donner la valeur de u_1 .
 b. En utilisant le fait que T_1 et G_1 forment un système complet d'événements et la formule des probabilités totales, montrer que $u_2 = \frac{1}{4}$.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5}.$$

3. a. Montrer que l'équation $x = \frac{1}{10}x + \frac{1}{5}$ admet une unique solution, que l'on notera ℓ dans la suite.
 b. On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $v_n = u_n - \ell$.
 Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
 c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer v_n en fonction de n .
 d. En déduire une expression de u_n en fonction de n .
 e. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.