

# Révisions de première année — Primitives

## 1 Formulaire

La lettre  $F$  désigne une primitive de  $f$ .

| $f(x)$               | $F(x)$                    | Commentaires                            |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------------------|
| 0                    | $k$                       | $k$ est un réel                         |
| $k$                  | $kx$                      | $k$ est un réel                         |
| $x^n$                | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$    | $n$ est un entier supérieur ou égal à 1 |
| $\frac{1}{x^n}$      | $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ | $n$ est un entier supérieur ou égal à 2 |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$               |                                         |
| $\frac{1}{x}$        | $\ln(x)$                  | valable sur $]0, +\infty[$              |
| $e^x$                | $e^x$                     |                                         |

Dans le tableau ci-dessous, les lettres  $u$  et  $v$  désignent deux fonctions admettant des primitives  $U$  et  $V$  sur un intervalle  $I$ .

| $f(x)$                | $F(x)$                | Commentaires          |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $u(x) + v(x)$         | $U(x) + V(x)$         |                       |
| $\lambda \times u(x)$ | $\lambda \times U(x)$ | $\lambda$ est un réel |

Dans le tableau ci-dessous, la lettre  $u$  désigne une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

| $f(x)$                      | $F(x)$                         | Commentaires                            |
|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------|
| $u'(x) \times [u(x)]^n$     | $\frac{1}{n+1} [u(x)]^{n+1}$   | $n$ est un entier supérieur ou égal à 1 |
| $\frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$    | $-\frac{1}{(n-1)[u(x)]^{n-1}}$ | $n$ est un entier supérieur ou égal à 2 |
| $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ | $2\sqrt{u(x)}$                 | $u$ est strictement positive sur $I$    |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$        | $\ln( u(x) )$                  | $u$ ne s'annule pas sur $I$             |
| $u'(x) \times e^{u(x)}$     | $e^{u(x)}$                     |                                         |

**Exemple 1** Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive  $F$  de  $f$ .

a.  $f(x) = x^3$

b.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c.  $f(x) = x^2 + 6x - 5$

d.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x-1}}$

e.  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

f.  $f(x) = 5e^{5x}$

g.  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

h.  $f(x) = e^{5x}$

## 2 À quoi servent les primitives ?

### À calculer des intégrales

**Définition 1** Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ . On appelle intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  le réel

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Exemple 2**  $\int_0^1 t^3 dt = \left[ \frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \times 1^4 - \frac{1}{4} \times 0^3 = \frac{1}{4}.$

**Exemple 3**  $\int_2^1 3 dt = [3t]_2^1 = 3 \times 1 - 3 \times 2 = 3 - 6 = -3.$

**Exemple 4** Calculer les intégrales ci-dessous.

a.  $\int_1^3 2 dt$

c.  $\int_2^0 t^2 dt$

e.  $\int_0^1 (4 - 3e^t) dt$

g.  $\int_{-1}^1 e^{-t} dt$

b.  $\int_0^1 (3t + 1) dt$

d.  $\int_{-2}^1 (3t^2 - 5) dt$

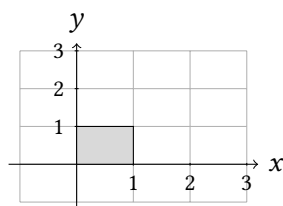
f.  $\int_1^e \frac{3}{t} dt$

h.  $\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 3} dt$

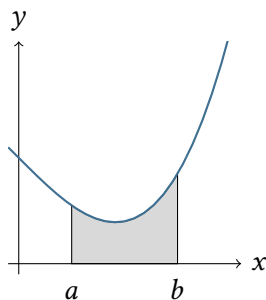
### ... et donc à calculer des aires

Dans le cas où  $f$  est une fonction continue et positive et où  $a < b$ , on peut donner une interprétation graphique de l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

On se place dans un repère orthogonal. On appelle *unité d'aire* l'aire du rectangle de sommets les points de coordonnées  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  et  $(0,1)$ .



L'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .



**Exemple 5** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ . On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe de  $f$ .

- a. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$ .
- b. Colorier la partie du plan délimitée par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$ . Calculer l'aire de la surface coloriée.