

Révisions de première année — Dérivées

1 Formulaire

$f(x)$	$f'(x)$	Commentaires
k	0	k est un réel
x^n	nx^{n-1}	n est un entier supérieur ou égal à 1
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	n est un entier supérieur ou égal à 1
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	f est définie sur $[0, +\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0, +\infty[$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
e^x	e^x	

Dans les tableaux ci-dessous, les lettres u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$f(x)$	$f'(x)$	Commentaires
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	
$\lambda \times u(x)$	$\lambda \times u'(x)$	λ est un réel
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$	v ne s'annule pas sur I

$f(x)$	$f'(x)$	Commentaires
$[u(x)]^n$	$n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$	n est un entier supérieur ou égal à 1
$\frac{1}{[u(x)]^n}$	$\frac{-n \times u'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$	n est un entier supérieur ou égal à 1
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	u est strictement positive sur I
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	u est strictement positive sur I
$e^{u(x)}$	$u'(x) \times e^{u(x)}$	

Exemple 1 Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $f'(x)$.

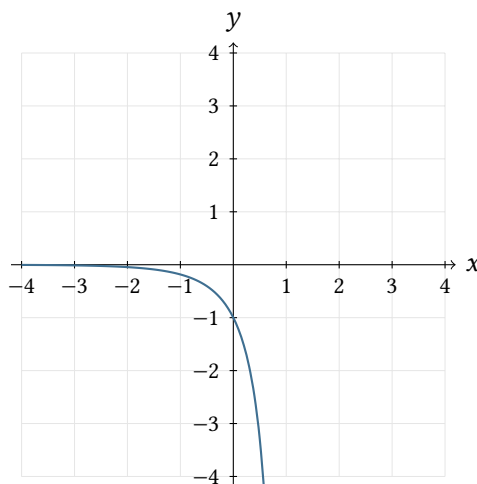
- a. $f(x) = x^3$ c. $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ e. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ g. $f(x) = \ln(e^x + 1)$
 b. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ d. $f(x) = xe^x$ f. $f(x) = e^{3x}$ h. $f(x) = [\ln(x)]^2$

2 À quoi servent les dérivées ?

À déterminer des équations de tangentes

Proposition 1 Soit f une fonction dérivable en un réel a . Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente sur la figure ci-dessous.



À étudier les variations des fonctions

Proposition 2 (principe de Lagrange) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I ;
- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I ;
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I .

Proposition 3 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est strictement positive sur I , ou si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , ou si f' est négative et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de I , alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple 3 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - 1$. Étudier les variations de f .

À étudier la convexité des fonctions

Proposition 4 Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . Alors

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I ;
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I .

Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(-x^2)$. Étudier la convexité de f .

3 Exercices

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées précédemment ainsi que la valeur du minimum.
- Étudier la convexité de f .

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - 3e^x$.

- Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées précédemment.
- Étudier la convexité de f .

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - x$.

- Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- On admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \frac{1-x}{x}$.
- Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées précédemment ainsi que la valeur du maximum.
- Étudier la convexité de f .

Exercice 4 (d'après BSB 2018)

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 1 + x$.
 - Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
 - Étudier la limite de f en $+\infty$.
 - Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
 - Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.
 - Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées précédemment.
- On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x , on a $f''(x) = \frac{2-x}{e^x}$. Étudier la convexité de f .
- Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 5 (d'après Ecricome 2021) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

- Étudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
 - On admet que f est dérivable sur $[1, +\infty[$. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ a le même signe que $1 - \ln(x)$.
 - Dresser le tableau de variations de f , en y faisant apparaître les valeurs des extremums et la limite en $+\infty$.
- On admet que f est deux fois dérivable sur $[1, +\infty[$. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, calculer $f''(x)$.
 - Étudier la convexité de f sur $[1, +\infty[$.
 - La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?
- On note M le point d'abscisse $e^{3/2}$ de $\mathcal{C}_f$.

- a. Déterminer les coordonnées de M .
 - b. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point M .
 - c. Calculer les coordonnées du point d'intersection N de $\mathcal{T}$ avec l'axe des ordonnées.
 - d. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$ sur $[1, +\infty[$.
4. On donne : $e \approx 2,72$, $\frac{1}{e} \approx 0,37$, $e^{3/2} \approx 4,48$, $f(e^{3/2}) \approx 0,33$, $f'(e^{3/2}) \approx -0,02$, $\frac{2}{e^{3/2}} \approx 0,45$.

Dans un repère orthogonal, tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ en plaçant le point M , le point N , ainsi que la droite $\mathcal{T}$. On pourra par exemple choisir comme unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.