

Planche d'exercices 2

Exercice 1 Écrire les sommes ci-dessous en utilisant le symbole Σ .

a. $1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50$

c. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{8}{9} + \frac{9}{10}$

b. $5 + 10 + 15 + \dots + 95 + 100$

d. $1 + 10 + 100 + \dots + 1\,000\,000\,000$

Exercice 2 Calculer « à la main » les sommes ci-dessous.

a. $\sum_{k=0}^5 (2k + 1)$

b. $\sum_{i=4}^6 \frac{5}{i}$

c. $\sum_{j=1}^4 j3^{j-1}$

d. $\sum_{k=0}^{100} (-1)^k$

Exercice 3 Calculer les sommes ci-dessous.

a. $\sum_{k=1}^8 6$

b. $\sum_{k=0}^7 \frac{1}{4}$

c. $\sum_{i=1}^9 (-7)$

d. $\sum_{j=5}^{10} \frac{2}{3}$

Exercice 4 En utilisant la somme de Gauss, calculer les sommes ci-dessous.

a. $\sum_{i=1}^{19} i$

b. $\sum_{k=0}^8 k$

c. $\sum_{k=0}^{17} k$

d. $\sum_{k=9}^{17} k$

Exercice 5 En utilisant les sommes géométriques, calculer les sommes ci-dessous.

a. $\sum_{k=0}^8 2^k$

b. $\sum_{k=1}^8 2^k$

c. $\sum_{i=0}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^i$

d. $\sum_{j=0}^6 \frac{1}{2^j}$

Exercice 6 En utilisant la linéarité, calculer les sommes ci-dessous.

a. $\sum_{k=0}^6 (k + 9)$

b. $\sum_{k=0}^7 \frac{1}{2}k$

c. $\sum_{k=1}^8 (4 - 5k)$

d. $\sum_{i=2}^{100} (-i - 1)$

Exercice 7 En utilisant une méthode adaptée, calculer les sommes ci-dessous.

a. $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k}$

b. $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{2}$

c. $\sum_{k=0}^6 2^{-k}$

d. $\sum_{k=0}^6 \frac{3}{2^k}$

Exercice 8 Soit n un entier naturel. Exprimer $\sum_{k=0}^n (2k + 1)$ en fonction de n .

Exercice 9

a. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b. En déduire $\sum_{k=1}^{100} k^2$.

c. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Exprimer $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ en fonction de n .

★ **Exercice 10** Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $x_1, \dots, x_n$ des réels vérifiant

$$\sum_{k=1}^n x_k = n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = n.$$

a. Calculer $\sum_{k=1}^n (1 - x_k)^2$.

b. En déduire que $x_1 = \dots = x_n = 1$.

Exercice 11 Compléter les égalités ci-dessous.

a. $\sum_{k=1}^5 \sqrt{k-1} = \sum_{k=\dots}^{\dots} \sqrt{k}$ b. $\sum_{k=0}^7 (k+1)^2 = \sum_{k=\dots}^{\dots} k^2$ c. $\sum_{k=1}^6 \frac{k-1}{k} = \sum_{k=0}^5 \dots$ d. $\sum_{k=0}^8 e^{k+2} = \sum_{k=\dots}^{\dots} e^k$

Exercice 12 Calculer $\sum_{k=1}^7 [k^2 - (k+1)^2]$.

Exercice 13 Calculer $\sum_{k=0}^{100} (e^{k+1} - e^k)$.

Exercice 14

a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$.

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 15

a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.

★ **Exercice 16**

a. Montrer que pour tout entier naturel k , on a $k \times k! = (k+1)! - k!$.

b. Soit n un entier naturel. Calculer $\sum_{k=0}^n k \times k!$.

★ **Exercice 17** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_n = n2^n$.

a. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de n et u_n .

b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_{n+1} - u_n - 2^{n+1}$.

c. Soit n un entier naturel. Montrer que $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = (n+1)2^{n+1}$.

d. Calculer $\sum_{k=0}^n 2^{k+1}$.

e. Déduire des questions précédentes que $\sum_{k=0}^n k2^k = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$.