

Planche d'exercices 3

Exercice 1 Effectuer les calculs ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Effectuer les calculs ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer AB et BA .
- Calculer $A - I_2$ et $B - I_2$. En déduire $(A - I_2)(B - I_2)$.
- Développer $(A - I_2)(B - I_2)$. En déduire une autre façon de calculer $(A - I_2)(B - I_2)$.

Exercice 4 Soient A une matrice carrée d'ordre 3. Développer l'expression $(A - I_3)(A + 2I_3)$.

Exercice 5 Soit A une matrice carrée. Factoriser l'expression $A^2 + A$.

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 .
- En déduire A^4 , puis A^8 .
- Que peut-on dire de A^9 ?

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

- Justifier que $A = \frac{1}{3}B$, où $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
- Calculer B^2 et B^3 . En déduire A^2 et A^3 .

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et A^3 .
- Pour tout entier naturel n non nul, conjecturer une expression des quatre coefficients de A^n .
- Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ définies par $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 1 + a_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique, puis donner une expression de son terme général.
- Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)$ de deux façons différentes.
- En déduire une expression du terme général de la suite $(b_n)_{n \geq 0}$.
- Soit n un entier naturel. Déterminer une expression des neuf coefficients de A^n .

★ **Exercice 10** Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. a. Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$.
 b. En déduire que $A^3 = 3A + 2I_2$.
 c. Montrer que $A^4 = \lambda A + \mu I_2$, où λ et μ sont deux réels à déterminer.
2. On considère les suites $(r_n)_{n \geq 0}$ et $(s_n)_{n \geq 0}$ définies par $r_0 = 0$, $s_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $r_{n+1} = r_n + s_n$ et $s_{n+1} = 2r_n$.
 a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $A^n = r_n A + s_n I_2$.
 b. Montrer que la suite $(k_n)_{n \geq 0}$ définie par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1 . En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de k_n en fonction de n .
 c. Montrer que la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ définie par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2 . En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de t_n en fonction de n .
 d. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n , une expression de r_n et s_n en fonction de n .
 e. Soit n un entier naturel. Déterminer une expression des quatre coefficients de A^n .

Exercice 11 Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que $A = \lambda N + I_2$, où λ est un réel à déterminer.
- b. Calculer N^2 . En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , on a $N^k = O_2$.
- c. Calculer A^{100} .

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Vérifier que $A = N + I_3$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- b. Calculer N^3 . Pour tout entier k supérieur ou égal à 3 , en déduire N^k .
- c. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 , on a $A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$.
- d. Vérifier que la formule de la question précédente reste valable pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
- e. Soit n un entier naturel. Déterminer une expression des neuf coefficients de A^n .

Exercice 13 (d'après Ecricome 2009) Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Calculer PQ et QP .
 b. Vérifier que $D = QAP$.
 c. Déduire des deux questions précédentes que $A = PDQ$.
 d. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $A^n = PD^nQ$.
 e. Soit n un entier naturel. Déterminer une expression des quatre coefficients de A^n .
2. On considère les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ définies par $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = 5x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -4x_n$.
 a. Calculer x_1 , y_1 , x_2 et y_2 .
 b. Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Donner U_0 .
 c. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $U_{n+1} = AU_n$.
 d. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $U_n = A^n U_0$.
 e. En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de x_n et y_n en fonction de n .