

Planche d'exercices 4

Exercice 1 Un sac contient trois jetons : deux jetons portant le numéro 1 et un jeton portant le numéro 2. On tire au hasard successivement et sans remise deux jetons de ce sac. Soient X la variable aléatoire donnant le premier numéro et Y celle donnant le second numéro.

- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ? Même question pour Y .
- Déterminer la loi de X , puis calculer l'espérance de X .
- Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
- Déduire de la question précédente la loi de Y .
- Calculer l'espérance du produit XY , puis la covariance de X et Y .
- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 Une boîte contient trois papiers numérotés de 1 à 3. On tire au hasard successivement et avec remise deux papiers de cette boîte.

- Soient X la variable aléatoire donnant le premier numéro et Y celle donnant le second numéro.
 - Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ? Même question pour Y .
 - Reconnaître la loi de X puis donner l'espérance de X .
 - Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
- Soit Z la variable aléatoire égale au minimum de X et de Y , c'est-à-dire égale au plus petit des deux numéros tirés.
 - Quel est l'ensemble des valeurs prises par Z ?
 - Déterminer la loi conjointe du couple (X, Z) .
 - En déduire la loi de Z .

Exercice 3 Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires.

$\begin{smallmatrix} \diagdown \\ X \backslash Y \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	a	a	$2a$
1	a	$2a$	$3a$

- Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
 - Déterminer a .
 - Déterminer les lois marginales.
 - Calculer l'espérance et la variance de X . Même question pour Y .
 - Calculer l'espérance de $X + Y$.
 - Calculer l'espérance de XY , puis la covariance de X et Y .
 - Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
 - Calculer la covariance de X et $X + Y$.
 - Calculer la variance de $X + Y$.
 - Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .
- ★ **Exercice 4** On dispose de deux urnes : la première contient deux boules numérotées 1 et 2 et la seconde contient quatre boules numérotées 3, 4, 5 et 6.
- On lance un dé bien équilibré et on change d'urne la boule dont le numéro a été tiré. Soit X le nombre de boules se trouvant dans la première urne après cette manipulation.
 - Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
 - Déterminer la loi de X , puis calculer l'espérance de X .
 - On lance le dé une nouvelle fois et on change d'urne la boule dont le numéro a été tiré. Soit Y le nombre de boules se trouvant dans la première urne après cette manipulation.
 - Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y ?
 - Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

- c. En déduire la loi de Y , puis calculer l'espérance de Y .
- d. Calculer l'espérance de XY , puis la covariance de X et Y .
- e. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 Soit X la variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. On considère aussi la variable aléatoire $Y = X^2$.

- a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) , puis en déduire la loi de Y .
- b. Calculer l'espérance de XY , puis la covariance de X et Y .
- c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 (d'après BSB 2018) Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne. Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.

À partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire, il ne reçoit aucun point. Ainsi, si les trois tirages successifs amènent blanc, rouge, rouge, le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage.

On introduit, pour tout entier k compris entre 1 et 3, les événements B_k : « obtenir une boule blanche au k -ième tirage » et R_k : « obtenir une boule rouge au k -ième tirage ».

1. Soit X_2 la variable aléatoire donnant le gain du joueur lors du deuxième tirage : X_2 prend la valeur 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et X_2 prend la valeur 0 sinon. Ainsi, la variable X_2 suit une loi de Bernoulli.
 - a. Justifier que $[X_2 = 1] = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$. Calculer $P([X_2 = 1])$.
 - b. Calculer l'espérance et la variance de X_2 .
2. Soit X_3 la variable aléatoire donnant le gain du joueur lors du troisième tirage.
 - a. Justifier que X_3 suit la même loi que X_2 .
 - b. Soit G la variable aléatoire donnant le nombre total de points marqués lors des trois tirages. Exprimer G en fonction de X_2 et X_3 . En déduire l'espérance de G .
3. a. Exprimer l'événement $[X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]$ en fonction de B_1, B_2, B_3 et R_1, R_2, R_3 . En déduire que

$$P([X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) = \frac{2}{9}.$$

- b. Déterminer la loi conjointe du couple (X_2, X_3) . En déduire que la covariance de X_2 et X_3 est égale à $\frac{2}{81}$.
- c. Calculer la variance de G .