

Planche d'exercices 5

Exercice 1

a. Montrer que pour tout réel x différent de -1 , on a $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.

b. Calculer $\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt$.

Exercice 2 Soient $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$ et $J = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$.

a. Calculer J .

b. Calculer $I + J$.

c. En déduire I .

Exercice 3

a. Vérifier que pour tout réel x , on a $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

b. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x différent de 2 et de 3, on ait

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}.$$

c. Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

Exercice 4 Quel est le signe de $\int_{1/2}^1 \ln(t)e^t dt$?

Exercice 5

a. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a $1 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b. En déduire que $1 \leq \int_0^1 e^{t^2} dt \leq e - 1$.

Exercice 6 Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t^2)^2} dt$.

1. Calculer I_1 .

2. a. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $I_n \geq 0$.

b. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

c. En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

3. a. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a $0 \leq \frac{x^n}{(1+x^2)^2} \leq x^n$.

b. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 7 Calculer les intégrales ci-dessous à l'aide d'une intégration par parties.

a. $\int_0^1 te^{2t} dt$

b. $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$

c. $\int_2^5 (2t-3)e^{-t} dt$

★ **Exercice 8** À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer $\int_0^1 t^2 e^{-t} dt$.

Exercice 9 Soient $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2}} dt$, $J = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} dt$ et $K = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 2} dt$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.
 - a. Calculer la dérivée de f .
 - b. En déduire la valeur de I .
2. a. Montrer que $J + 2I = K$.
 - b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
 - c. En déduire les valeurs de J et K .

★ **Exercice 10 (d'après ECSP 2017)** Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$. On note aussi

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

1. a. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a $0 \leq e^{-x^2} \leq 1$.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - c. Étudier la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
 - a. Calculer la dérivée de f .
 - b. En déduire que $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.
3. a. En utilisant l'égalité $x^{n+2}e^{-x^2} = x^{n+1} \times xe^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n , on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$.
 - b. En déduire I_3 et I_5 .
 - c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.