

Correction du DL2

1. a. Notons A l'événement « on effectue le premier tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$ » et B l'événement « on effectue le premier tirage dans l'urne $\mathcal{U}_2$ ». Comme A et B forment un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P([X_1 = 1]) &= P(A \cap [X_1 = 1]) + P(B \cap [X_1 = 1]) \\ &= P(A) \times P_A([X_1 = 1]) + P(B) \times P_B([X_1 = 1]) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{5}$.

- b. On a $E(X_1) = p = \frac{2}{5}$ et $V(X_1) = p(1-p) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.
2. a. On a

$$\begin{aligned} P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) &= P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) \\ &= P([X_1 = 0]) \times P_{[X_1=0]}([X_2 = 0]) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}. \end{aligned}$$

- b. On a

$$\begin{aligned} P([X_2 = 0] \cap [Z = 1]) &= P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) \\ &= P([X_1 = 1]) \times P_{[X_1=1]}([X_2 = 0]) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}, \\ P([X_2 = 0] \cap [Z = 2]) &= 0, \\ P([X_2 = 1] \cap [Z = 0]) &= 0, \\ P([X_2 = 1] \cap [Z = 1]) &= P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) \\ &= P([X_1 = 0]) \times P_{[X_1=0]}([X_2 = 1]) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}, \\ P([X_2 = 1] \cap [Z = 2]) &= P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \\ &= P([X_1 = 1]) \times P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}. \end{aligned}$$

Voici la loi du couple (X_2, Z) sous forme de tableau.

$Z \backslash X_2$	0	1	2
0	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	0
1	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$

3. a. Les événements $[Z = 0]$, $[Z = 1]$ et $[Z = 2]$ forment un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned} P([X_2 = 0]) &= P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) + P([X_2 = 0] \cap [Z = 1]) + P([X_2 = 0] \cap [Z = 2]) \\ &= \frac{12}{25} + \frac{4}{25} + 0 = \frac{16}{25}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P([X_2 = 1]) = 1 - P([X_2 = 0]) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

La variable aléatoire X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{9}{25}$.

$$\text{On a } E(X_2) = \frac{9}{25} \text{ et } V(X_2) = \frac{9}{25} \times \frac{16}{25} = \frac{144}{625}.$$

b. On a

$$P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{6}{25},$$

tandis que

$$P([X_1 = 1]) \times P([X_2 = 1]) = \frac{2}{5} \times \frac{9}{25} = \frac{18}{125}.$$

Ceci montre que $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \neq P([X_1 = 1]) \times P([X_2 = 1])$. Ainsi, les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

c. En sommant les colonnes du tableau de la question 2.b, on obtient la loi de Z .

z	0	1	2
$P([Z = z])$	$\frac{12}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{6}{25}$

d. On a

$$E(Z) = 0 \times \frac{12}{25} + 1 \times \frac{7}{25} + 2 \times \frac{6}{25} = \frac{19}{25}.$$

D'après le théorème de transfert, on a

$$E(Z^2) = 0^2 \times \frac{12}{25} + 1^2 \times \frac{7}{25} + 2^2 \times \frac{6}{25} = \frac{31}{25}.$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{31}{25} - \left(\frac{19}{25}\right)^2 = \frac{775}{625} - \frac{361}{625} = \frac{414}{625}.$$

4. En continuant à noter A l'événement « on effectue le premier tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$ », on a

$$P_{[X_1=0]}(A) = \frac{P(A \cap [X_1 = 0])}{P([X_1 = 0])} = \frac{P(A) \times P_A([X_1 = 0])}{P([X_1 = 0])} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{3}.$$

5. a. À l'aide du tableau de la question 2b, on obtient $E(X_2 Z) = 1 \times 1 \times \frac{3}{25} + 1 \times 2 \times \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

b. D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a

$$\text{Cov}(X_2, Z) = E(X_2 Z) - E(X_2)E(Z) = \frac{3}{5} - \frac{9}{25} \times \frac{19}{25} = \frac{375}{625} - \frac{171}{625} = \frac{204}{625}.$$

c. Comme $Z = X_1 + X_2$, on a aussi $X_1 = Z - X_2$. Par bilinéarité de la covariance, on a

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(Z - X_2, X_2) = \text{Cov}(Z, X_2) - \text{Cov}(X_2, X_2) = \text{Cov}(X_2, Z) - V(X_2).$$

Donc

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{204}{625} - \frac{144}{625} = \frac{60}{625} = \frac{12}{125}.$$

d. On a

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) + V(X_2) = \\ &= \frac{6}{25} + 2 \times \frac{12}{125} + \frac{144}{625} = \frac{150}{625} + \frac{120}{625} + \frac{144}{625} = \frac{414}{625}. \end{aligned}$$