

Correction du DL1

1. *Mise en place.* Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. D'une part, on a $M^0 = I_2$. D'autre part, on a

$$\begin{pmatrix} b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc

$$M^0 = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$. Mon-

trons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $M^{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} & a_{n+1} \\ 0 & b_{n+1} \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times b_n + 1 \times 0 & 2 \times a_n + 1 \times b_n \\ 0 \times b_n + 2 \times 0 & 0 \times a_n + 2 \times b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b_n & 2a_n + b_n \\ 0 & 2b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{n+1} & a_{n+1} \\ 0 & b_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le théorème de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$.

2. **a.** La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 2$.
b. Pour tout entier naturel n , on a $b_n = b_0 \times q^n$, donc $b_n = 1 \times 2^n$, c'est-à-dire $b_n = 2^n$; on en déduit que

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n = 2a_n + 2^n.$$

3. **a.** Pour tout entier naturel n , on a

$$c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$. Son premier terme est

$$c_0 = \frac{a_0}{2^0} = \frac{0}{1} = 0.$$

- b.** On en déduit que pour tout entier naturel n , on a $c_n = c_0 + n \times r$, c'est-à-dire $c_n = 0 + n \times \frac{1}{2}$, ou encore

$$c_n = \frac{n}{2}.$$

- c.** Pour tout entier naturel n , la relation $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ entraîne $a_n = 2^n c_n$. Ainsi, pour tout entier naturel n ,

on a $a_n = 2^n \times \frac{n}{2}$, c'est-à-dire

$$a_n = n2^{n-1}.$$

4. On en déduit que pour tout entier naturel n , on a

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

5. a. Pour tout entier naturel k , on a $a_{k+1} = 2a_k + 2^k$, donc

$$a_{k+1} = a_k + a_k + 2^k,$$

puis

$$a_{k+1} - a_k - 2^k = a_k,$$

qui est bien l'égalité désirée.

- b. Pour tout entier naturel n , on a, par télescopage,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_0 \\ &= a_{n+1} - 0 \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

- c. Pour tout entier naturel n , on a

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$$

- d. On utilise l'égalité montrée à la question 5.a. En sommant, on obtient, pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k - 2^k).$$

Par linéarité, il vient

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^n 2^k.$$

D'après les questions 5.b et 5.c, on a

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_{n+1} - (2^{n+1} - 1) = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1.$$

On se sert maintenant de la question 3.c et on obtient finalement

$$\sum_{k=0}^n a_k = (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 = (n+1)2^n - 2 \times 2^n + 1 = [(n+1) - 2]2^n + 1 = (n-1)2^n + 1.$$

6. a. On a

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1/2 + 1 \times 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et

$$QP = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

- b. On a

$$QA = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$QAP = (QA)P = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M.$$

- c. *Mise en place.* Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $QA^n P = M^n$ ».

Initialisation. D'une part, on a $QA^0 P = QI_2 P = QP = I_2$. D'autre part, on a $M^0 = I_2$. Donc $QA^0 P = M^0$. Donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $QA^n P = M^n$. Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $QA^{n+1} P = M^{n+1}$. On a

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= MM^n = (QAP)(QA^nP) \\
&= QA(PQ)A^nP \\
&= QAI_2A^nP \\
&= QAA^nP \\
&= QA^{n+1}P.
\end{aligned}$$

Conclusion. D'après le théorème de récurrence, la proposition $\mathcal{S}_n$ est vraie pour tout entier naturel n . Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a $QA^nP = M^n$.

- d.** Soit n un entier naturel. Comme $QA^nP = M^n$, on obtient en multipliant par P : $PQA^nP = PM^n$, c'est-à-dire $A^nP = PM^n$. Puis, en multipliant par Q : $A^nPQ = PM^nQ$, c'est-à-dire $A^n = PM^nQ$. Il ne reste plus qu'à calculer PM^nQ . On trouve

$$PM^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} + 2^n \\ -2^n & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ -2^n & (2-n)2^{n-1} \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{aligned}
A^n &= (PM^n)Q = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + (n+2)2^{n-2} & -2^{n-1} + (n+2)2^{n-2} \\ -2^{n-1} + (2-n)2^{n-2} & 2^{n-1} + (2-n)2^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (n+4)2^{n-2} & n2^{n-2} \\ -n2^{n-2} & (4-n)2^{n-2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nous avons bien donné une expression des quatre coefficients de A^n . On peut réécrire ceci sous la forme

$$A^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} n+4 & n \\ -n & 4-n \end{pmatrix}.$$