

DL2 — Couples de variables aléatoires

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient trois boules rouges et deux boules vertes, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge et quatre boules vertes. On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- Si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
- Si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte.} \end{cases}$$

On pose $Z = X_1 + X_2$.

- a. Montrer que $P([X_1 = 1]) = \frac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?
 - b. Donner les valeurs de $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
- a. Montrer que $P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \frac{12}{25}$.
 - b. Donner sous forme de tableau la loi du couple (X_2, Z) .
- a. Déterminer la loi de X_2 , ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
 - b. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
 - c. Déterminer la loi de Z .
 - d. Calculer $E(Z)$. Montrer que $V(Z) = \frac{414}{625}$.
- a. On considère l'événement « la première boule tirée est verte ». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
 - b. On se propose dans cette question de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.
 - c. Calculer $E(X_2 Z)$.
 - d. Montrer que $\text{Cov}(X_2, Z) = \frac{204}{625}$.
 - e. En déduire la valeur de $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
 - f. Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.

D'après ESCP 2013.