

DL1 — Matrices carrées

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère les deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ définies par $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2b_n.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$.
2.
 - a. De quel type est la suite $(b_n)_{n \geq 0}$?
 - b. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.
3. Soit $(c_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $c_n = \frac{a_n}{2^n}$.
 - a. Montrer que $(c_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de c_n en fonction de n .
 - c. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n , on a $a_n = n2^{n-1}$.
4. En déduire, pour tout entier naturel n , les quatre coefficients de M^n .
5. *Application au calcul d'une somme.*
 - a. Montrer que pour tout entier naturel k , on a $a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$.
 - b. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.
 - c. Pour tout entier naturel n , calculer $\sum_{k=0}^n 2^k$.
 - d. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n , on a $\sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
6. *Application au calcul des puissances d'une autre matrice.*
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
 - a. Calculer PQ et QP .
 - b. Vérifier que $QAP = M$.
 - c. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $QA^nP = M^n$.
 - d. Déterminer les quatre coefficients de A^n .

D'après ESC 2013.