

Chapitre 1 — Systèmes linéaires

1 Définitions et exemples

Définition 1 Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle *système linéaire* de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ à coefficients réels tout système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,p}$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des réels fixés. Une *solution* du système est un p -uplet de réels $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations.

Exemple 1 Voici cinq systèmes :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ 3x + y^2 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3, \end{cases} \\ &\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -x + 4y + 2z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 4x - y = -4 \\ x + 6y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Identifier les systèmes qui sont linéaires et préciser le nombre d'équations et d'inconnues.

Définition 2 On dit que deux systèmes sont *équivalents* lorsqu'ils ont exactement les mêmes solutions.

Exemple 2 Les systèmes

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

sont-ils équivalents ?

2 Résolution d'un système linéaire par substitution

Pour résoudre un système linéaire, on peut utiliser la méthode de *substitution*.

Exemple 3 Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$ en utilisant la méthode de substitution.

Pour un système de trois équations à trois inconnues, la résolution est plus longue. La substitution n'est pas le procédé le plus efficace.

3 Opérations élémentaires sur les lignes

Dans la suite, on désigne par L_1 la première ligne d'un premier système, L_2 sa deuxième ligne, etc.

Définition 3 On appelle *opération élémentaire* sur les lignes d'un système toute opération de l'un des types suivants :

- échange des lignes L_i et L_j : opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- multiplication d'une ligne L_i par un réel λ non nul : opération notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- ajout d'un multiple de la ligne L_j à une autre ligne L_i ($i \neq j$) : opération notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Exemple 4 Dans l'exemple 2, on passe du premier système au second système en échangeant les lignes L_1 et L_2 . Cette opération est notée $L_1 \leftrightarrow L_2$.

Les opérations élémentaires sont *réversibles* : chaque opération possède une opération inverse du même type. Cette remarque permet d'établir la proposition ci-dessous.

Proposition 1 Toute opération élémentaire transforme un système linéaire en un système linéaire qui lui est équivalent.

Cette proposition permet de résoudre des systèmes linéaires de manière plus efficace que la méthode de substitution. Nous allons présenter sur quelques exemples la méthode de *combinaison*, fondée sur l'algorithme du *pivot de Gauss*.

Exemple 5 Résoudre le système
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = -2. \end{cases}$$

Exemple 6 Résoudre le système
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Exemple 7 Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Exemple 8 Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2. \end{cases}$$

Exemple 9 Résoudre le système
$$\begin{cases} x - 2y - z = -3 \\ 2x - 3y + 4z = -4 \\ 3x + y - 2z = 5. \end{cases}$$

Exemple 10 Résoudre le système
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Exemple 11 Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + \quad + 2z = 9. \end{cases}$$

En résumé, l'algorithme du pivot de Gauss consiste à

- choisir un coefficient non nul dans la première colonne ;
- utiliser ce coefficient comme pivot ;
- annuler les coefficients situés sous le pivot ;
- passer à la colonne suivante ;
- recommencer jusqu'à obtenir un système échelonné ;
- remonter le système pour déterminer les inconnues.

Un système linéaire peut admettre

- une unique solution ;
- aucune solution ;
- une infinité de solutions.