

Chapitre 2 — Sommes

1 Le symbole Σ

Considérons l'expression suivante :

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25.$$

Il s'agit d'une somme de cinq termes. On peut la réécrire ainsi :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Dans cette somme, chaque terme est de la forme k^2 , où k prend successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5. On peut la noter de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^5 k^2.$$

On lit « somme des k^2 pour k entier variant de 1 à 5 ».

La variable de comptage k que l'on vient d'utiliser est *muette* : elle n'a pas de valeur spécifique en dehors du calcul de la somme, elle est juste utilisée comme intermédiaire pour condenser l'écriture. Autrement dit, on a

$$\sum_{k=0}^7 k^2 = \sum_{i=0}^7 i^2 = \sum_{j=0}^7 j^2.$$

2 Sommes usuelles

Proposition 1 (sommes d'une constante) Soit a un réel.

- Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $\sum_{k=1}^n a = na$.
- Pour tout entier naturel n , on a $\sum_{k=0}^n a = (n+1)a$.
- Pour tout entier naturel p et pour tout entier n supérieur ou égal à p , on a $\sum_{k=p}^n a = (n-p+1)a$.

Exemple 1 Calculer $\sum_{k=1}^5 4$, $\sum_{k=0}^5 4$ et $\sum_{k=2}^7 4$.

Proposition 2 (somme de Gauss) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 2 Calculer $\sum_{k=1}^{100} k$.

Remarquons que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k$.

Proposition 3 (sommes géométriques) Soit q un réel différent de 1. Pour tout entier naturel n , on a

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Attention, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $\sum_{k=1}^n q^k = \left(\sum_{k=0}^n q^k\right) - q^0 = \left(\sum_{k=0}^n q^k\right) - 1$.

Exemple 3 Calculer $\sum_{k=0}^7 2^k$.

Exemple 4 Calculer $\sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Exemple 5 Calculer $\sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

3 Linéarité de la somme

Proposition 4 Soient n un entier naturel ainsi que $u_0, u_1, \dots, u_n$ et $v_0, v_1, \dots, v_n$ des réels. On a

$$\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k.$$

Exemple 6 Calculer $\sum_{k=0}^{100} (k + 5)$.

Proposition 5 Soient n un entier naturel ainsi que $u_0, u_1, \dots, u_n$ et λ un réel. On a

$$\sum_{k=0}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^n u_k.$$

Exemple 7 Calculer $\sum_{k=0}^{100} 2k$.

Exemple 8 Calculer $\sum_{k=0}^7 (3k - 2)$.

4 Décalage d'indice

Nous allons présenter la technique de *décalage d'indice* sur des exemples.

Exemple 9 Calculer $\sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Exemple 10 Calculer $\sum_{k=0}^{99} (k + 1)$.

5 Sommes télescopiques

Une *somme télescopique* est une somme dont les termes s'annulent de proche en proche. La formulation vient de l'image d'un télescope que l'on replie.

Exemple 11 Calculer $\sum_{k=0}^5 (2^k - 2^{k+1})$.

Exemple 12 Calculer $\sum_{k=1}^9 [(k+1)^3 - k^3]$.

Exemple 13

- a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
- b. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.