

Chapitre 3 — Matrices carrées

Dans ce chapitre, les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1 Rappels sur les matrices

Répondre aux questions ci-dessous.

- Qu'est-ce qu'une matrice à n lignes et p colonnes ?
- Comment note-t-on l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels ?
- Si A est une matrice, comment note-t-on son coefficient situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne ?
- Quelles opérations a-t-on définies sur les matrices ?

2 Définitions et exemples

Définition 1 On appelle *matrice carrée* d'ordre n toute matrice à n lignes et n colonnes.

Exemple 1 La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est carrée d'ordre 2.

Définition 2 On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Exemple 2 On reprend la matrice A de l'exemple 1. Alors $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 1 Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. Alors $A + B$, λA et AB sont aussi des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 3 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$, $3A$ et AB .

3 Propriétés algébriques

Proposition 2 Soient A, B, C, D quatre matrices carrées de même ordre et λ, μ deux réels. On a

- | | |
|--|---|
| • $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$; | • $(AB)C = A(BC)$; |
| • $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; | • $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$. |
| • $(A + B) + C = A + (B + C)$; | • $A(B + C) = AB + AC$; |
| • $A + B = B + A$; | • $(A + B)C = AC + BC$; |
| • $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; | • $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$. |

Attention, le produit matriciel n'est pas commutatif ! En général, on a $AB \neq BA$.

Exemple 4 On reprend les matrices A et B de l'exemple 3. Comparer AB et BA .

4 Matrices carrées particulières

Matrices nulles

Définition 3 On appelle *matrice nulle* d'ordre n la matrice carrée d'ordre n qui a tous ses coefficients nuls. On la note O_n .

Exemple 5 $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 3 Soit A une matrice carrée d'ordre n . On a

- $A + O_n = A$;
- $A + (-A) = O_n$;
- $0A = O_n$;
- $AO_n = O_n$ et $O_nA = O_n$.

Matrices identités

Définition 4 Soit A une matrice carrée d'ordre n . Les *coefficients diagonaux* de A sont les coefficients $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$.

Par exemple, pour une matrice A carrée d'ordre 2, les coefficients diagonaux sont $a_{1,1}$ et $a_{2,2}$. Pour une matrice A carrée d'ordre 3, les coefficients diagonaux sont $a_{1,1}, a_{2,2}$ et $a_{3,3}$.

Définition 5 On appelle *matrice identité* d'ordre n la matrice carrée d'ordre n qui a tous ses coefficients diagonaux égaux à 1 et tous ses coefficients non diagonaux nuls. On la note I_n .

Exemple 6 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Calculer AI_2 et I_2A . Qu'observe-t-on ?

Proposition 4 Soit A une matrice carrée d'ordre n . On a $AI_n = A$ et $I_nA = A$.

Matrices diagonales

Définition 6 On appelle *matrice diagonale* toute matrice carrée qui a tous ses coefficients non diagonaux nuls.

Exemple 7 Les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont diagonales.

Proposition 5 Soient D, D' deux matrices diagonales de même ordre et λ un réel. Alors les matrices $D + D', \lambda D$ et DD' sont aussi diagonales.

Exemple 8 Soient $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $D + D', 3D$ et DD' .

Matrices triangulaires

Définition 7 Soit A une matrice carrée d'ordre n . Les *coefficients sous-diagonaux* de A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $1 \leq j < i \leq n$.

Par exemple, pour une matrice A carrée d'ordre 2, il n'y a qu'un seul coefficient sous-diagonal qui est $a_{2,1}$. Pour une matrice A carrée d'ordre 3, les coefficients sous-diagonaux sont $a_{2,1}$, $a_{3,1}$ et $a_{3,2}$.

Définition 8 On appelle *matrice triangulaire supérieure* toute matrice carrée qui a tous ses coefficients sous-diagonaux nuls.

Exemple 9 Les matrices $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont triangulaires supérieures.

Proposition 6 Soient T, T' deux matrices triangulaires supérieures de même ordre et λ un réel. Alors les matrices $T + T'$, λT et TT' sont triangulaires supérieures.

Exemple 10 Soient $T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $T' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $T + T'$, $-2T$ et TT' .

On définit de même la notion de matrice triangulaire inférieure.

Exemple 11 Les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont triangulaires inférieures.

5 Puissances d'une matrice carrée

Définition et exemples

Définition 9 Soient A une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel non nul. On appelle *puissance k -ième* de A et on note A^k la matrice $A \times A \times \dots \times A$, ce dernier produit comportant k facteurs. Par ailleurs, on pose $A^0 = I_n$.

Exemple 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 .

Exemple 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = O_3$.

Propriétés algébriques

Proposition 7 Soient A une matrice carrée et k, l deux entiers naturels. On a $A^k A^l = A^{k+l}$.

Exemple 14 $A^2 A^3 = A^5$.

Proposition 8 Soient A une matrice carrée et k, l deux entiers naturels. On a $(A^k)^l = A^{kl}$.

Exemple 15 $(A^2)^3 = A^6$.

Proposition 9 Soient λ un réel, A une matrice carrée et k un entier naturel. On a $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Exemple 16 $(2A)^3 = 2^3 A^3 = 8A^3$.

Cas des matrices diagonales

Proposition 10 Soit D une matrice diagonale. Pour tout entier naturel k , la matrice D^k est aussi diagonale. De plus, les coefficients diagonaux de D^k s'obtiennent simplement en élevant à la puissance k les coefficients diagonaux de D .

Exemple 17 Soit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer D^2 et D^3 .

Proposition 11 Pour tout entier naturel k , on a $I_n^k = I_n$.

Calcul des puissances

La problématique est la suivante : étant donné une matrice carrée A , est-il possible de déterminer une expression de A^n en fonction de l'entier naturel n ?

Exemple 18 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et A^3 .
- Pour tout entier naturel n , conjecturer une expression des quatre coefficients de A^n .
- Démontrer la conjecture par récurrence.

La prochaine proposition est un outil important pour le calcul des puissances.

Répondre d'abord à la question suivante : est-il vrai que pour toutes matrices carrées A et B de même ordre, on a $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Proposition 12 (formule du binôme de Newton) Soient A, B deux matrices carrées de même ordre et n un entier naturel. Si A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$, alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Exemple 19 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $A = N + I_2$, où $N = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.
- Calculer N^2 . Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, en déduire N^k .
- Calculer A^{10} .

Exemple 20 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $A = N + 2I_3$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Calculer N^2 . Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, en déduire N^k .
- Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} N$.
- Vérifier que la formule de la question précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit n un entier naturel. Déterminer une expression des neuf coefficients de A^n .