

Chapitre 4 — Couples de variables aléatoires

Dans ce chapitre, la lettre Ω désigne un univers fini et P une mesure de probabilité sur Ω .

1 Rappels sur les variables aléatoires

Répondre aux questions ci-dessous.

- Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?
- Comment note-t-on l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X ?
- Qu'est-ce que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ?
- Donner la définition de l'espérance de X .
- Énoncer la formule de Kœnig-Huygens.

Exemple 1 On lance un dé bien équilibré. On gagne un euro si le numéro 1 apparaît et six euros si le numéro 6 apparaît ; on perd deux euros dans tous les autres cas. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique après un lancer.

- a. Donner $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X .
- b. Déterminer la loi de probabilité de X .
- c. Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.
- d. Calculer la variance de X .

2 Premières définitions

Les couples de variables aléatoires permettent d'étudier des phénomènes *bivariés*, c'est-à-dire des situations où deux variables aléatoires interagissent.

Couple de variables aléatoires

Définition 1 Un couple de variables aléatoires (X, Y) défini sur Ω est la donnée d'une première variable aléatoire X et d'une seconde variable aléatoire Y , toutes deux définies sur Ω .

Exemple 2 On range au hasard une chemise et un pantalon dans une armoire comportant deux tiroirs. Soient X la variable aléatoire donnant le nombre de vêtements rangés dans le premier tiroir et Y celle donnant le nombre de tiroirs vides. On dispose alors du couple de variables aléatoires (X, Y) .

Loi conjointe

Définition 2 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur Ω . On appelle *loi de probabilité conjointe* de (X, Y) la donnée de toutes les probabilités $P([X = x] \cap [Y = y])$, où x appartient à $X(\Omega)$ et y appartient à $Y(\Omega)$.

En pratique, on donne la loi de probabilité conjointe sous la forme d'un tableau à double entrée.

Exemple 3 On reprend le couple de variables aléatoires (X, Y) de l'exemple 2. Déterminer la loi de probabilité conjointe de (X, Y) .

Lois marginales

Définition 3 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur Ω . On appelle *première loi marginale* de (X, Y) la loi de probabilité de X et *seconde loi marginale* de (X, Y) la loi de probabilité de Y .

La formule des probabilités totales permet de déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe.

Exemple 4 On reprend le couple de variables aléatoires (X, Y) de l'exemple 2. Déterminer les lois marginales de (X, Y) .

On remarque que les lois marginales s'obtiennent en sommant les lignes ou les colonnes du tableau à double entrée donnant la loi conjointe.

Exemple 5 Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y) .

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	a	$\frac{1}{3}$

- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ? Même question pour Y .
- Déterminer a .
- Déterminer les lois marginales.

3 Indépendance de deux variables aléatoires

On donne ici la définition générale, bien que dans ce chapitre l'univers Ω soit supposé fini.

Définition 4 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers *fini ou non*. On dit que X et Y sont *indépendantes* lorsque pour tous réels x et y , les événements $[X \leq x]$ et $[Y \leq y]$ sont indépendants, ce qui se traduit par $P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P([X \leq x]) \times P([Y \leq y])$.

Proposition 1 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω *fini*. Alors X et Y sont *indépendantes* si et seulement si pour tout x appartenant à $X(\Omega)$ et pour tout y appartenant à $Y(\Omega)$, on a $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x]) \times P([Y = y])$.

Exemple 6 On reprend l'exemple 2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exemple 7 On reprend l'exemple 5. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Proposition 2 Si l'une des variables aléatoires X ou Y est constante, alors X et Y sont indépendantes.

4 Espérance

Linéarité de l'espérance

Proposition 3 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On a

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Exemple 8 On reprend l'exemple 2. Calculer l'espérance de $X + Y$.

Proposition 4 Soient λ un réel et X une variable aléatoire définie sur Ω . On a $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Exemple 9 On reprend l'exemple 2. Calculer l'espérance de $2X$.

Espérance d'un produit de deux variables aléatoires

Proposition 5 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . L'espérance de la variable aléatoire XY (produit de X par Y) est donnée par

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} x \times y \times P([X = x] \cap [Y = y]).$$

En général, on a $E(XY) \neq E(X) \times E(Y)$.

Exemple 10 On reprend l'exemple 2. Calculer l'espérance de XY .

Exemple 11 On reprend l'exemple 5. Calculer l'espérance de XY .

Proposition 6 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

La réciproque est fausse.

5 Covariance de deux variables aléatoires

Définition et premières propriétés

Définition 5 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . Notons m l'espérance de X et m' l'espérance de Y . On appelle *covariance* de X et Y le réel

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - m)(Y - m')).$$

La covariance est donc la moyenne du produit des écarts de X et Y à leurs moyennes respectives m et m' . Une interprétation est donnée à la fin du chapitre (coefficient de corrélation linéaire).

En pratique, pour calculer une covariance, on utilise la proposition ci-dessous.

Proposition 7 (formule de Kœnig-Huygens) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On a

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Exemple 12 On reprend l'exemple 2. Calculer la covariance de X et Y .

Exemple 13 On reprend l'exemple 5. Calculer la covariance de X et Y .

Proposition 8 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

La réciproque est fausse.

Proposition 9 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On a

- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$;
- $\text{Cov}(X, X) = V(X)$;
- si l'une des variables X ou Y est constante, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Bilinéarité de la covariance

Proposition 10 Soient X, X', Y, Y' des variables aléatoires définies sur Ω et λ un réel. Alors

- $\text{Cov}(X + X', Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X', Y)$ et $\text{Cov}(\lambda X, Y) = \lambda \text{Cov}(X, Y)$;
- $\text{Cov}(X, Y + Y') = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Y')$ et $\text{Cov}(X, \lambda Y) = \lambda \text{Cov}(X, Y)$.

Exemple 14 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . « Développer » les expressions ci-dessous.

- a. $\text{Cov}(X + Y, X)$ b. $\text{Cov}(2X, Y)$ c. $\text{Cov}(X, X - Y)$ d. $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$

Variance d'une somme de deux variables aléatoires

Proposition 11 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On a

$$V(X + Y) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

Exemple 15 On reprend l'exemple 2. Calculer la variance de $X + Y$.

Exemple 16 On reprend l'exemple 5. Calculer la variance de $X + Y$.

Proposition 12 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

La réciproque est fausse.

Coefficient de corrélation linéaire

Définition 6 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On suppose que les variances de X et de Y sont non nulles. On appelle *coefficient de corrélation linéaire* entre X et Y le réel

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$$

L'intérêt de cet indicateur est expliqué ci-dessous.

Proposition 13 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . On a $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Le coefficient de corrélation linéaire mesure la « dépendance linéaire » entre deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont *parfaitement corrélées linéairement* lorsqu'il existe un réel a non nul et un réel b tels que $P(Y = aX + b) = 1$.

- Si $\rho(X, Y) = 1$, alors X et Y sont parfaitement corrélées linéairement et $a > 0$.
- Si $\rho(X, Y) = -1$, alors X et Y sont parfaitement corrélées linéairement et $a < 0$.
- Si $\rho(X, Y) = 0$, alors X et Y ne sont pas corrélées linéairement. Mais il existe peut-être une autre forme de corrélation.

Plus $|\rho(X, Y)|$ est proche de 1, plus la dépendance linéaire entre X et Y « tend à être forte ».