

Chapitre 5 — Compléments sur les intégrales

1 Linéarité de l'intégrale

Les deux propositions ci-dessous sont à mettre en regard avec celles qui concernent la linéarité de la somme.

Proposition 1 Soient u, v deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b deux réels de I . On a

$$\int_a^b (u(t) + v(t)) dt = \int_a^b u(t) dt + \int_a^b v(t) dt.$$

Exemple 1 Calculer $\int_1^4 \left(t^2 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$.

Proposition 2 Soient u une fonction continue sur un intervalle I , ainsi que a, b deux réels de I et λ un réel. On a

$$\int_a^b \lambda u(t) dt = \lambda \int_a^b u(t) dt.$$

Exemple 2 Calculer $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{t}} dt$.

Exemple 3

a. Montrer que pour tout réel x différent de -1 et de 0 , on a $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

b. Calculer $\int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt$.

2 Positivité et croissance de l'intégrale

Proposition 3 (positivité) Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux réels de I . Si $a \leq b$ et si pour tout x de $[a, b]$, on a $f(x) \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

L'hypothèse $a \leq b$ est importante. Elle dit que les bornes de l'intégrale sont « rangées dans l'ordre croissant ».

Exemple 4 Justifier que $\int_2^5 (2t - 3)e^{-t} dt \geq 0$.

De même, si $a \leq b$ et si pour tout x de $[a, b]$, on a $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq 0$.

Proposition 4 (croissance) Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b deux réels de I . Si $a \leq b$ et si pour tout x de $[a, b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

Exemple 5

- a. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.
- b. En déduire que $\ln(2) \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1$.

3 Intégration par parties

Proposition 5 (intégration par parties) Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , telles que u' et v' sont continues sur I . Soient a et b deux réels de I . On a

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

Cette formule permet de calculer beaucoup d'intégrales qui ne nous étaient jusqu'ici pas accessibles.

Exemple 6 Calculer $\int_0^1 te^t dt$.

Exemple 7 Calculer $\int_1^2 t \ln(t) dt$.

Exemple 8 En écrivant $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$, calculer $\int_1^2 \ln(t) dt$.

4 Intégrales et suites

Les exercices de concours mélangent souvent intégrales et suites.

Exemple 9 Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1. a. Calculer I_0 .
b. Reconnaître I_1 .
2. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$
 b. Calculer I_2 et I_3 .
3. a. Justifier que pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
b. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
c. En déduire que $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
4. a. Soit n un entier naturel. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a $x^n \leq x^n e^x \leq ex^n$.
b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

- c. Déterminer alors la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.