

Correction de la planche d'exercices 1

Exercice 1

a.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -5y = 5 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet une unique solution qui est le couple $(2, -1)$.

b.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 4y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 1 \\ 9y = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet une unique solution qui est le couple $(1, 0)$.

c.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 0 = 8 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

Le système n'a pas de solution.

d.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ 6x - 4y = 12 \end{cases} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ -y = 6 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ y = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet une unique solution qui est le couple $(-2, -6)$.

Exercice 2

a.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 4y + 9z = 18 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2y + 6z = 14 \\ -z = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y + 3z = 7 \\ z = 4 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système admet une unique solution qui est le triplet $(2, -5, 4)$.

b.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = -5 \\ 2x - y - 4z = -11 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 5z = -11 \\ -3y - 6z = -15 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 6y + 15z = 33 \\ 6y + 12z = 30 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -3L_2 \\ L_3 \leftarrow -2L_3 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 6y + 15z = 33 \\ -3z = -3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 6y + 15z = 33 \\ z = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système admet une unique solution qui est le triplet $(-2, 3, 1)$.

c.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3x - 2y - z = 2 \\ x - y - 2z = 4 \\ 5x - 2y + 5z = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 4 \\ 3x - 2y - z = 2 \\ 5x - 2y + 5z = 3 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 4 \\ y + 5z = -10 \\ 3y + 15z = -17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 4 \\ y + 5z = -10 \\ 0 = 13 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2
\end{aligned}$$

Le système n'a pas de solution.

d.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 5x - 4y - z = 0 \\ x + 3z = -8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 2 \\ y + 4z = -10 \\ y + 4z = -10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 2 \\ y + 4z = -10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 2 \\ y + 4z = -10 \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 2 \\ y = -10 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 - 3\lambda \\ y = -10 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système admet une infinité de solutions, qui sont les triplets de la forme $(-8 - 3\lambda, -10 - 4\lambda, \lambda)$, où λ est un réel.

Exercice 3 Le système admet une unique solution qui est $\left(\frac{a-c}{4}, \frac{a-b}{2}, \frac{a+2b+c}{4}\right)$.