

Correction de la planche d'exercices 2

Exercice 1

- a. $1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 = \sum_{k=1}^{50} k.$
- b. $5 + 10 + 15 + \dots + 95 + 100 = 5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + \dots + 5 \times 19 + 5 \times 20 = \sum_{k=1}^{20} 5k.$
- c. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{8}{9} + \frac{9}{10} = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{3}{3+1} + \dots + \frac{8}{8+1} + \frac{9}{9+1} = \sum_{k=1}^9 \frac{k}{k+1}.$
- d. $1 + 10 + 100 + \dots + 1\,000\,000\,000 = 10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^9 = \sum_{k=0}^9 10^k.$

Exercice 2

- a.
- $$\sum_{k=0}^5 (2k+1) = (2 \times 0 + 1) + (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1) + (2 \times 4 + 1) + (2 \times 5 + 1)$$
- $$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$$
- b. $\sum_{i=4}^6 \frac{5}{i} = \frac{5}{4} + \frac{5}{5} + \frac{5}{6} = \frac{15}{12} + \frac{12}{12} + \frac{10}{12} = \frac{37}{12}.$
- c. $\sum_{j=1}^4 j3^{j-1} = 1 \times 3^{1-1} + 2 \times 3^{2-1} + 3 \times 3^{3-1} + 4 \times 3^{4-1} = 1 + 6 + 27 + 108 = 142.$
- d. $\sum_{k=0}^{100} (-1)^k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100} = 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) + 1 = 1.$

Exercice 3

- a. $\sum_{k=1}^8 6 = 8 \times 6 = 48.$
- b. $\sum_{k=0}^7 \frac{1}{4} = 8 \times \frac{1}{4} = 2.$
- c. $\sum_{i=1}^{10} (-7) = 9 \times (-7) = -63.$
- d. $\sum_{j=5}^{10} \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3} = 4.$

Exercice 4

- a. $\sum_{i=1}^{19} i = \frac{19 \times 20}{2} = 19 \times 10 = 190.$
- b. $\sum_{k=0}^8 k = \frac{8 \times 9}{2} = 4 \times 9 = 36.$
- c. $\sum_{k=0}^{17} k = \frac{17 \times 18}{2} = 17 \times 9 = 153.$
- d. $\sum_{k=9}^{17} k = \sum_{k=0}^{17} k - \sum_{k=0}^8 k = 153 - 36 = 117.$

Exercice 5

- a. $\sum_{k=0}^8 2^k = \frac{1-2^9}{1-2} = \frac{1-512}{-1} = \frac{-511}{-1} = 511.$
- b. $\sum_{k=1}^8 2^k = \left(\sum_{k=0}^8 2^k \right) - 2^0 = 511 - 1 = 510.$
- c. $\sum_{i=0}^6 \left(\frac{1}{2} \right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{128} \times 2 = \frac{127}{64}.$
- d. $\sum_{j=0}^6 \frac{1}{2^j} = \sum_{j=0}^6 \left(\frac{1}{2} \right)^j = \frac{127}{64}.$

Exercice 6

- a. $\sum_{k=0}^6 (k+9) = \sum_{k=0}^6 k + \sum_{k=0}^6 9 = \frac{6 \times 7}{2} + 7 \times 9 = 21 + 63 = 84.$
- b. $\sum_{k=0}^7 \frac{1}{2} k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^7 k = \frac{1}{2} \times \frac{7 \times 8}{2} = \frac{7 \times 8}{4} = 14.$
- c. $\sum_{k=1}^8 (4-5k) = \sum_{k=1}^8 4 - 5 \sum_{k=1}^8 k = 8 \times 4 - 5 \times \frac{8 \times 9}{2} = 32 - 5 \times 36 = -148.$
- d. $\sum_{i=2}^{100} (-i-1) = - \sum_{i=2}^{100} i - \sum_{i=2}^{100} 1 = - \left[\left(\sum_{i=1}^{100} i \right) - 1 \right] - 99 \times 1 = - \left[\frac{100 \times 101}{2} - 1 \right] - 99 = -5049 - 99 = -5148.$

Exercice 7

- a. $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}.$
- b. $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2.$
- c. $\sum_{k=0}^6 2^{-k} = \sum_{k=0}^6 \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^6 \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{63}{32}.$
- d. $\sum_{k=0}^6 \frac{3}{2^k} = 3 \sum_{k=0}^6 \frac{1}{2^k} = 3 \sum_{k=0}^6 \left(\frac{1}{2} \right)^k = 3 \times \frac{127}{64} = \frac{381}{64}.$

Exercice 8 Par linéarité, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (2k+1) &= 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\
 &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
 &= n(n+1) + (n+1) \\
 &= n(n+1) + 1 \times (n+1) \\
 &= (n+1)[n+1] \\
 &= (n+1)^2.
 \end{aligned}$$

Exercice 9

- a. *Mise en place.* Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\ll \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg.$$

Initialisation. D'une part, on a $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$.

D'autre part, on a $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Ainsi, on a $\sum_{k=1}^1 k^2 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$, donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Conclusion. D'après le théorème de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1. Autrement dit, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b. On a $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 50 \times 101 \times 67 = 5050 \times 67 = 338\,350$.

c. Par linéarité, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k(k+1) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
&= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 3n]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + 4n]}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 10

a. Par linéarité, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (1 - x_k)^2 &= \sum_{k=1}^n (1 - 2x_k + x_k^2) \\
&= \sum_{k=1}^n 1 - 2 \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n x_k^2 \\
&= n - 2n + n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b. Tous les termes de la somme $\sum_{k=1}^n (1 - x_k)^2$ sont des carrés, donc ils sont positifs. Or cette somme est nulle, donc tous les carrés sont nuls : pour tout entier k compris entre 1 et n , on a $(1 - x_k)^2 = 0$, c'est-à-dire $x_k = 1$.

Exercice 11

- a. $\sum_{k=1}^5 \sqrt{k-1} = \sum_{k=0}^4 \sqrt{k}.$
- b. $\sum_{k=0}^6 (k+1)^2 = \sum_{k=1}^7 k^2.$
- c. $\sum_{k=1}^6 \frac{k-1}{k} = \sum_{k=0}^5 \frac{k}{k+1}.$
- d. $\sum_{k=0}^8 e^{k+2} = \sum_{k=2}^{10} e^k.$

Exercice 12 On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^7 [k^2 - (k+1)^2] &= [1^2 - 2^2] + [2^2 - 3^2] + \dots + [7^2 - 8^2] \\
&= 1^2 - 2^2 + 2^2 - 3^2 + \dots + 7^2 - 8^2 \\
&= 1^2 - 8^2 \\
&= 1 - 64 \\
&= -63.
\end{aligned}$$

Exercice 13 On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{100} (e^{k+1} - e^k) &= (e^1 - e^0) + (e^2 - e^1) + \dots + (e^{101} - e^{100}) \\
 &= e^1 - e^0 + e^2 - e^1 + \dots + e^{101} - e^{100} \\
 &= e^{101} - e^0 \\
 &= e^{101} - 1.
 \end{aligned}$$

Exercice 14

a. Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k}{k} + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

b. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln(k)] \\
 &= [\ln(2) - \ln(1)] + [\ln(3) - \ln(2)] + \dots + [\ln(n+1) - \ln(n)] \\
 &= \ln(n+1) - \ln(1) \\
 &= \ln(n+1) - 0 \\
 &= \ln(n+1).
 \end{aligned}$$

Exercice 15

a. On utilise la quantité conjuguée. Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\
 &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1 - k} \\
 &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{1} \\
 &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.
 \end{aligned}$$

b. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= \sqrt{n+1} - \sqrt{1} \\
 &= \sqrt{n+1} - 1.
 \end{aligned}$$

Exercice 16

a. Pour tout entier naturel k , on a

$$k \times k! = [(k+1) - 1] k! = (k+1) \times k! - 1 \times k! = (k+1)! - k!.$$

b. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n [(k+1)! - k!] \\
&= [1! - 0!] + [2! - 1!] + \dots + [(n+1)! - n!] \\
&= (n+1)! - 0! \\
&= (n+1)! - 1.
\end{aligned}$$

Exercice 17

a. Pour tout entier naturel n , on a

$$u_{n+1} = (n+1)2^{n+1} = n2^{n+1} + 2^{n+1} = n \times 2 \times 2^n + 2^{n+1} = 2 \times n2^n + 2^{n+1} = 2u_n + 2^{n+1}.$$

b. Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n - 2^{n+1} &= 2u_n + 2^{n+1} - u_n - 2^{n+1} \\
&= u_n.
\end{aligned}$$

c. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n) \\
&= u_{n+1} - u_0 \\
&= (n+1)2^{n+1} - 0 \times 2^0 \\
&= (n+1)2^{n+1}.
\end{aligned}$$

d. Par linéarité, on a

$$\sum_{k=0}^n 2^{k+1} = 2 \sum_{k=0}^n 2^k = 2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 2.$$

e. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k2^k &= \sum_{k=0}^n u_k \\
&= \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k - 2^{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) - \sum_{k=0}^n 2^{k+1} \\
&= (n+1)2^{n+1} - (2^{n+2} - 2) \\
&= n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2 \times 2^{n+1} + 2 \\
&= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2.
\end{aligned}$$