

Correction de la planche d'exercices 3

Exercice 1 On a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + (-1) \times 3 & 1 \times 2 + (-1) \times 0 \\ 2 \times (-1) + 1 \times 3 & 2 \times 2 + 1 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times (-1) \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 1 \times 1 + 2 \times 0 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times (-1) \\ 0 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times (-1) \\ 2 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 & 2 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 2 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times (-1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \times (-4) + 1 \times 2 \\ -1 \times (-4) + 3/2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

a. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0 + (-1) \times (-3) & 2 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 1 \times 0 + 1 \times (-3) & 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 & 0 \times (-1) + 1 \times 1 \\ -3 \times 2 + 1 \times 1 & (-3) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

b. On a

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$(A - I_2)(B - I_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. On a

$$(A - I_2)(B - I_2) = AB - AI_2 - I_2B + I_2^2 = AB - A - B + I_2.$$

On en déduit que

$$(A - I_2)(B - I_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 On a

$$(A - I_3)(A + 2I_3) = A^2 + 2AI_3 - I_3A - 2I_3^2 = A^2 + 2A - A - 2I_3 = A^2 + A - 2I_3.$$

Exercice 5 On a $A^2 + A = A \times A + A \times I = A(A + I)$, où I désigne la matrice identité de même ordre que A .

Exercice 6

a. On a

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 1 \times (-1) & 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ -1 \times 0 + 0 \times (-1) & -1 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. On remarque que $A^2 = -I_2$. Donc $A^4 = (A^2)^2 = (-I_2)^2 = I_2^2 = I_2$. De même, on a $A^8 = (A^4)^2 = I_2^2 = I_2$.

c. On a $A^9 = AA^8 = AI_2 = A$. Ainsi, la matrice A^9 est égale à la matrice A .

Exercice 7

a. On a

$$\frac{1}{3}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} = A.$$

En effet, multiplier une matrice par un réel revient à multiplier tous les coefficients de la matrice par ce réel.

b. On a

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

et

$$B^3 = BB^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -3 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A^2 = \left(\frac{1}{3}B\right)^2 = \frac{1}{9}B^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = \left(\frac{1}{3}B\right)^3 = \frac{1}{27}B^3 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -12 & -3 \\ 12 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/9 & -1/9 \\ 4/9 & -5/9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

a. On a

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times (-1) & 1 \times (-1) + (-1) \times 1 \\ -1 \times 1 + 1 \times (-1) & -1 \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-1) \times (-2) & 1 \times (-2) + (-1) \times 2 \\ -1 \times 2 + 1 \times (-2) & -1 \times (-2) + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

b. On conjecture que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

c. *Mise en place.* Pour tout entier naturel n non nul, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. D'une part, on a $A^1 = A$. D'autre part, on a

$$\begin{pmatrix} 2^{1-1} & -2^{1-1} \\ -2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & -2^0 \\ -2^0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi, on a $A^1 = \begin{pmatrix} 2^{1-1} & -2^{1-1} \\ -2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix}$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel non nul.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & -2^{n-1} - 2^{n-1} \\ -2^{n-1} - 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1} & 2 \times (-2^{n-1}) \\ 2 \times (-2^{n-1}) & 2 \times 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le théorème de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul. Autrement dit, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

a. *Mise en place.* Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. D'une part, on a $A^0 = I_3$. D'autre part, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & b_0 \\ 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi, on a $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & b_0 \\ 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 & a_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times a_n + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times b_n + 1 \times a_n + 0 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 0 & 0 \times a_n + 1 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times b_n + 1 \times a_n + 1 \times 1 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 & 0 \times a_n + 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times b_n + 0 \times a_n + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a_n + 1 & b_n + a_n \\ 0 & 1 & a_n + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 & a_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le théorème de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n . Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b.** Pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} - a_n = 1$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison 1. De plus, pour tout entier naturel n , on a $a_n = a_0 + n \times 1$, c'est-à-dire $a_n = n$.
- c.** Par télescopage, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0 = b_n.$$

Par définition de la suite $(b_n)_{n \geq 0}$, on a aussi

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}.$$

- d.** On déduit de la question précédente que pour tout entier $n \geq 1$, on a $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$. Cette formule est encore valable pour $n = 0$ puisque $b_0 = 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $b_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
- e.** On a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

- 1. a.** On a

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \times (-4) + 6 \times (-3) & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

et

$$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $A^2 = A + 2I_2$.

- b.** On a

$$A^3 = AA^2 = A(A + 2I_2) = A^2 + 2A = (A + 2I_2) + 2A = 3A + 2I_2.$$

- c.** On a

$$A^4 = AA^3 = A(3A + 2I_2) = 3A^2 + 2A = 3(A + 2I_2) + 2A = 3A + 6I_2 + 2A = 5A + 6I_2.$$

Ainsi, on a $A^4 = \lambda A + \mu I_2$, avec $\lambda = 5$ et $\mu = 6$.

- 2. a.** *Mise en place.* Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^n = r_n A + s_n I_2$ ».
- Initialisation.* D'une part, on a $A^0 = I_2$. D'autre part, on a $r_0 A + s_0 I_2 = 0A + 1I_2 = I_2$. Donc $A^0 = r_0 A + s_0 I_2$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité.* Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $A^n = r_n A + s_n I_2$. Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $A^{n+1} = r_{n+1} A + s_{n+1} I_2$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= A(r_n A + s_n I_2) \\ &= r_n A^2 + s_n A \\ &= r_n (A + 2I_2) + s_n A \\ &= r_n A + 2r_n I_2 + s_n A \\ &= (r_n + s_n) A + 2r_n I_2 \\ &= r_{n+1} A + s_{n+1} I_2. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le théorème de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n . Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a $A^n = r_n A + s_n I_2$.

b. Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= r_{n+1} - s_{n+1} \\ &= (r_n + s_n) - 2r_n \\ &= -r_n + s_n \\ &= -(r_n - s_n) \\ &= -1 \times k_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(k_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison -1 et de premier terme $k_0 = r_0 - s_0 = 0 - 1 = -1$. On en déduit que pour tout entier naturel n , on a $k_n = k_0 \times (-1)^n$, c'est-à-dire

$$k_n = (-1)^{n+1}.$$

c. Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= r_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} \\ &= s_{n+1} + k_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} \\ &= s_{n+1} + (-1)^{n+2} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} \\ &= 2r_n + (-1)^n - \frac{(-1)^n}{3} \\ &= 2r_n + \frac{2(-1)^n}{3} \\ &= 2\left(r_n + \frac{(-1)^n}{3}\right) \\ &= 2t_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $t_0 = r_0 + \frac{(-1)^0}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

On en déduit que pour tout entier naturel n , on a $t_n = t_0 \times 2^n$, c'est-à-dire

$$t_n = \frac{2^n}{3}.$$

d. Pour tout entier naturel n , on a $r_n = t_n - \frac{(-1)^n}{3}$, donc

$$r_n = \frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Pour tout entier naturel n , on a $s_n = r_n - k_n$, donc

$$s_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} - (-1)^{n+1} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} + (-1)^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$

e. On a $A^n = r_n A + s_n I_2 = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_2$. On en tire

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4(2^n - (-1)^n) + 2^n + 2(-1)^n & 6(2^n - (-1)^n) \\ -3(2^n - (-1)^n) & 5(2^n - (-1)^n) + 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \times 2^n + 6(-1)^n & 6(2^n - (-1)^n) \\ -3(2^n - (-1)^n) & 6 \times 2^n - 3(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2(2^n - (-1)^n) \\ -(2^n - (-1)^n) & 2 \times 2^n - (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 11**a.** On a

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 4N.$$

Donc $A = 4N + I_2$. On a bien $A = \lambda N + I_2$, avec $\lambda = 4$.**b.** On a

$$N^2 = NN = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2.$$

Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a alors

$$N^k = N^2 N^{k-2} = O_2 N^{k-2} = O_2.$$

c. Comme les matrices $4N$ et I_2 commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On a

$$\begin{aligned} A^{100} &= (4N + I_2)^{100} \\ &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (4N)^k I_2^{100-k} \\ &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 4^k N^k I_2 \\ &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 4^k N^k \\ &= \binom{100}{0} 4^0 N^0 + \binom{100}{1} 4^1 N^1 + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 4^k N^k \\ &= 1 \times 1 I_2 + 100 \times 4N + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 4^k O_2 \\ &= I_2 + 400N + O_2 \\ &= I_2 + 400N. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 400 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12**a.** On a

$$N + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

b. On a

$$N^2 = NN = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

On en déduit que pour tout entier $k \geq 3$, on a

$$N^k = N^2 N^{k-2} = O_3 N^{k-2} = O_3.$$

c. Les matrices N et I_3 commutent : on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On a

$$\begin{aligned}
A^n &= (N + I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3 \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k.
\end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned}
A^n &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} N^k \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} O_3 \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 + O_3 \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2.
\end{aligned}$$

d. Pour $n = 0$, on a d'une part $A^0 = I_3$ et d'autre part $I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = I_3 + 0N + 0N^2 = I_3$.

Pour $n = 1$, on a d'une part $A^1 = A$ et d'autre part $I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = I_3 + 1N + 0N^2 = I_3 + N = A$.

Pour $n = 2$, on a d'une part $A^2 = (N + I_3)^2$ et d'autre part $I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = I_3 + 2N + N^2 = (I_3 + N)^2$ car I_3 et N commutent. Dans les trois cas, la formule reste valable.

e. On a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

1. a. On a

$$\begin{aligned}
PQ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 1 \times (-1) & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_2.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
QP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= I_2.
\end{aligned}$$

b. On a

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en tire

$$QAP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

- c. On part de l'égalité $D = QAP$ et on multiplie par P . On obtient

$$PD = P(QAP) = (PQ)AP = I_2AP = AP.$$

On part maintenant de $PD = AP$ et on multiplie par Q . On obtient $PDQ = APQ$. Comme $PQ = I_2$, il vient $PDQ = A$.

- d. *Mise en place.* Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^n = PD^nQ$ ».

Initialisation. D'une part, on a $A^0 = I_2$. D'autre part, on a $PD^0Q = PI_2Q = PQ = I_2$. Donc $A^0 = PD^0Q$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $A^n = PD^nQ$. Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $A^{n+1} = PD^{n+1}Q$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= (PDQ)(PD^nQ) \\ &= PD(QP)D^nQ \\ &= PD I_2 D^nQ \\ &= PDD^nQ \\ &= PD^{n+1}Q. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le théorème de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n . Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a $A^n = PD^nQ$.

- e. Comme D est une matrice diagonale, la matrice D^n est aussi diagonale et

$$D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 1 \\ -4^n & -4 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$A^n = PD^nQ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n & 1 \\ -4^n & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^{n+1} - 1 & 4^n - 1 \\ -4^{n+1} + 4 & -4^n + 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} (4^{n+1} - 1)/3 & (4^n - 1)/3 \\ (-4^{n+1} + 4)/3 & (-4^n + 4)/3 \end{pmatrix}.$$

2. a. On a $x_1 = 5x_0 + y_0 = 5 \times 0 + 1 = 1$, $y_1 = -4x_0 = -4 \times 0 = 0$, $x_2 = 5x_1 + y_1 = 5 \times 1 + 0 = 5$ et $y_2 = -4x_1 = -4 \times 1 = -4$.

- b. On a $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- c. Pour tout entier naturel n , on a

$$AU_n = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_n + y_n \\ -4x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

- d. *Mise en place.* Pour tout entier naturel n , notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $U_n = A^n U_0$ ».

Initialisation. On a $A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $U_n = A^n U_0$. Montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$. On a

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} &= AU_n \\
 &= A(A^n U_0) \\
 &= (AA^n)U_0 \\
 &= A^{n+1}U_0.
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. D'après le théorème de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n . Autrement dit, pour tout entier naturel n , on a $U_n = A^n U_0$.

e. Pour tout entier naturel n , on a

$$U_n = A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^{n+1} - 1 & 4^n - 1 \\ -4^{n+1} + 4 & -4^n + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n - 1 \\ -4^n + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4^n - 1)/3 \\ (-4^n + 4)/3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n , on a

$$x_n = \frac{4^n - 1}{3} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{4 - 4^n}{3}.$$