

Correction de la planche d'exercices 4

Exercice 1

- a. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{1, 2\}$. L'ensemble des valeurs prises par Y est $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.
- b. On a $P([X = 1]) = \frac{2}{3}$ et $P([X = 2]) = \frac{1}{3}$. Voici la loi de X donnée sous forme de tableau.

x	1	2
$P([X = x])$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

L'espérance de X est $E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

- c. On a

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) = P([X = 1]) \times P_{[X=1]}([Y = 1]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 2]) = P([X = 1]) \times P_{[X=1]}([Y = 2]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P([X = 2] \cap [Y = 1]) = P([X = 2]) \times P_{[X=2]}([Y = 1]) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3},$$

$$P([X = 2] \cap [Y = 2]) = P([X = 2]) \times P_{[X=2]}([Y = 2]) = \frac{1}{3} \times 0 = 0.$$

Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe du couple (X, Y) .

	Y	1	2
X			
1		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2		$\frac{1}{3}$	0

- d. Comme les événements $[X = 1]$ et $[X = 2]$ forment un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P([Y = 1]) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) + P([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

De même, on obtient

$$P([Y = 2]) = P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 2] \cap [Y = 2]) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

On remarque que la loi de Y est la même que la loi de X .

- e. On a

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times 2 \times 0 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 0 \\ &= \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \\
&= \frac{15}{9} - \frac{16}{9} \\
&= -\frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

- f. Si les variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, alors leur covariance serait nulle. Or ce n'est pas le cas. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2

1. a. On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

b. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$. L'espérance de X est $E(X) = \frac{3+1}{2} = 2$.

c. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, pour tout entier i compris entre 1 et 3 et pour tout entier j compris entre 1 et 3, on a

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = i]) \times P([Y = j]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe du couple (X, Y) .

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

2. a. On a $Z(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

b. En utilisant l'indépendance des variables aléatoires X et Y , on obtient

$$P([X = 1] \cap [Z = 1]) = P([X = 1] \cap [Y \geq 1]) = P([X = 1]) \times P([Y \geq 1]) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3},$$

$$P([X = 1] \cap [Z = 2]) = P(\emptyset) = 0,$$

$$P([X = 1] \cap [Z = 3]) = P(\emptyset) = 0,$$

$$P([X = 2] \cap [Z = 1]) = P([X = 2] \cap [Y = 1]) = P([X = 2]) \times P([Y = 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P([X = 2] \cap [Z = 2]) = P([X = 2] \cap [Y \geq 2]) = P([X = 2]) \times P([Y \geq 2]) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P([X = 2] \cap [Z = 3]) = P(\emptyset) = 0,$$

$$P([X = 3] \cap [Z = 1]) = P([X = 3] \cap [Y = 1]) = P([X = 3]) \times P([Y = 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P([X = 3] \cap [Z = 2]) = P([X = 3] \cap [Y = 2]) = P([X = 3]) \times P([Y = 2]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P([X = 3] \cap [Z = 3]) = P([X = 3] \cap [Y = 3]) = P([X = 3]) \times P([Y = 3]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe du couple (X, Z) .

$X \backslash Z$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

- c. Les événements $[X = 1]$, $[X = 2]$ et $[X = 3]$ forment un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned} P([Z = 1]) &= P([X = 1] \cap [Z = 1]) + P([X = 2] \cap [Z = 1]) + P([X = 3] \cap [Z = 1]) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} P([Z = 2]) &= P([X = 1] \cap [Z = 2]) + P([X = 2] \cap [Z = 2]) + P([X = 3] \cap [Z = 2]) \\ &= 0 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P([Z = 3]) &= P([X = 1] \cap [Z = 3]) + P([X = 2] \cap [Z = 3]) + P([X = 3] \cap [Z = 3]) \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous donne la loi de Z .

z	1	2	3
$P([Z = z])$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Exercice 3

- a. On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

- b. Comme $a + a + 2a + a + 2a + 3a = 1$, il vient $10a = 1$, puis $a = \frac{1}{10}$.

- c. Les événements $[Y = 0]$, $[Y = 1]$ et $[Y = 2]$ forment un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned} P([X = 0]) &= P([X = 0] \cap [Y = 0]) + P([X = 0] \cap [Y = 1]) + P([X = 0] \cap [Y = 2]) \\ &= a + a + 2a = 4a = 4 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P([X = 1]) &= P([X = 1] \cap [Y = 0]) + P([X = 1] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 2]) \\ &= a + 2a + 3a = 6a = 6 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Les événements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ forment un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned} P([Y = 0]) &= P([X = 0] \cap [Y = 0]) + P([X = 1] \cap [Y = 0]) = a + a = 2a = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}, \\ P([Y = 1]) &= P([X = 0] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 1]) = a + 2a = 3a = 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}, \\ P([Y = 2]) &= P([X = 0] \cap [Y = 2]) + P([X = 1] \cap [Y = 2]) = 2a + 3a = 5a = 5 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous donne la loi de X .

x	0	1
$P([X = x])$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Le tableau ci-dessous donne la loi de Y .

y	0	1	2
$P([Y = y])$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

d. On a

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{3}{5} = 0 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

et

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} = 0 + \frac{3}{10} + 1 = \frac{13}{10}.$$

Calculons la variance de X . D'après le théorème de transfert, on a

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{25} = \frac{15}{25} - \frac{9}{25} = \frac{6}{25}.$$

Calculons la variance de Y . D'après le théorème de transfert, on a

$$E(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{1}{2} = 0 + \frac{3}{10} + 2 = \frac{23}{10}.$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{23}{10} - \left(\frac{13}{10}\right)^2 = \frac{23}{10} - \frac{169}{100} = \frac{230}{100} - \frac{169}{100} = \frac{61}{100}.$$

e. Par linéarité de l'espérance, on a

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{6}{10} + \frac{13}{10} = \frac{19}{10}.$$

f. On a

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \times 0 \times a + 0 \times 1 \times a + 0 \times 2 \times 2a + 1 \times 0 \times a + 1 \times 1 \times 2a + 1 \times 2 \times 3a \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 2a + 6a = 8a = 8 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

puis

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{13}{10} = \frac{4}{5} - \frac{39}{50} = \frac{40}{50} - \frac{39}{50} = \frac{1}{50}.$$

g. Si les variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, alors leur covariance serait nulle. Or ce n'est pas le cas. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

h. Par bilinéarité de la covariance, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, X + Y) &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) \\ &= V(X) + \text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\text{Cov}(X, X + Y) = \frac{6}{25} + \frac{1}{50} = \frac{12}{50} + \frac{1}{50} = \frac{13}{50}.$$

i. On a

$$V(X + Y) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y),$$

donc

$$V(X + Y) = \frac{6}{25} + 2 \times \frac{1}{50} + \frac{61}{100} = \frac{24}{100} + \frac{4}{100} + \frac{61}{100} = \frac{89}{100}.$$

j. On a $\sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$ et $\sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{61}{100}} = \frac{\sqrt{61}}{10}$, donc

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{\sqrt{6}}{5} \times \frac{\sqrt{61}}{10}} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{\sqrt{366}}{50}} = \frac{1}{\sqrt{366}} = \frac{\sqrt{366}}{366}.$$

Exercice 4

1. a. On a $X(\Omega) = \{1, 3\}$.

b. On a $P([X = 1]) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P([X = 3]) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Voici la loi de X donnée sous forme de tableau.

x	1	3
$P([X = x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$\text{On a } E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

2. a. On a $Y(\Omega) = \{0, 2, 4\}$.

b. On a

$$P([X = 1] \cap [Y = 0]) = P([X = 1]) \times P_{[X=1]}([Y = 0]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18},$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 2]) = P([X = 1]) \times P_{[X=1]}([Y = 2]) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18},$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 4]) = P([X = 1]) \times P_{[X=1]}([Y = 4]) = \frac{1}{3} \times 0 = 0,$$

$$P([X = 3] \cap [Y = 0]) = P([X = 3]) \times P_{[X=3]}([Y = 0]) = \frac{2}{3} \times 0 = 0,$$

$$P([X = 3] \cap [Y = 2]) = P([X = 3]) \times P_{[X=3]}([Y = 2]) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P([X = 3] \cap [Y = 4]) = P([X = 3]) \times P_{[X=3]}([Y = 4]) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{3}.$$

Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe du couple (X, Y) .

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	2	4
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	0
3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

c. Comme les événements $[X = 1]$ et $[X = 3]$ forment un système complet d'événements, la formule des probabilités totales permet d'écrire

$$P([Y = 0]) = P([X = 1] \cap [Y = 0]) + P([X = 3] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{18} + 0 = \frac{1}{18}.$$

De même, on a

$$P([Y = 2]) = P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 3] \cap [Y = 2]) = \frac{5}{18} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18}.$$

et

$$P([Y = 4]) = P([X = 1] \cap [Y = 4]) + P([X = 3] \cap [Y = 4]) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Le tableau ci-dessous donne la loi de Y .

y	0	2	4
$P([Y = y])$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{3}$

On a $E(Y) = 0 \times \frac{1}{18} + 2 \times \frac{11}{18} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{23}{9}$.

d. On a

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times 0 \times \frac{1}{18} + 1 \times 2 \times \frac{5}{18} + 1 \times 4 \times 0 + 3 \times 0 \times 0 + 3 \times 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times 4 \times \frac{1}{3} \\ &= 0 + \frac{5}{9} + 0 + 0 + 2 + 4 = \frac{59}{9}. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{59}{9} - \frac{7}{3} \times \frac{23}{9} = \frac{177}{27} - \frac{161}{27} = \frac{16}{27}.$$

- e. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, si elles l'étaient, alors leur covariance serait nulle.

Exercice 5

a. On a $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P([X = -1] \cap [Y = 0]) = P([X = -1]) \times P_{[X=-1]}([Y = 0]) = \frac{1}{3} \times 0 = 0,$$

$$P([X = -1] \cap [Y = 1]) = P([X = -1]) \times P_{[X=-1]}([Y = 1]) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3},$$

$$P([X = 0] \cap [Y = 0]) = P([X = 0]) \times P_{[X=0]}([Y = 0]) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3},$$

$$P([X = 0] \cap [Y = 1]) = P([X = 0]) \times P_{[X=0]}([Y = 1]) = \frac{1}{3} \times 0 = 0,$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 0]) = P([X = 1]) \times P_{[X=1]}([Y = 0]) = \frac{1}{3} \times 0 = 0,$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) = P([X = 1]) \times P_{[X=1]}([Y = 1]) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe du couple (X, Y) .

$X \backslash Y$	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

Voici la loi de Y donnée sous forme de tableau.

y	0	1
$P([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

b. On a

$$E(XY) = 0 - \frac{1}{3} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3} = 0.$$

De plus, on a $E(X) = 0$, donc

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times E(Y) = 0.$$

c. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, on a

$$P([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{3},$$

tandis que

$$P([X = 0]) \times P([Y = 0]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{3}.$$

Cet exercice montre que la covariance de deux variables aléatoires peut être nulle, sans que ces variables soient indépendantes.

Exercice 6

1. a. Le joueur reçoit un point au deuxième tirage si et seulement s'il obtient une boule blanche au premier tirage et une boule rouge au second tirage, ou une boule rouge au premier tirage et une boule blanche au second tirage. Ainsi, on a

$$[X_2 = 1] = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2),$$

puis

$$P([X_2 = 1]) = P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)).$$

Comme les événements $B_1 \cap R_2$ et $R_1 \cap B_2$ sont incompatibles, on a

$$P([X_2 = 1]) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2).$$

Comme les événements B_1 et R_2 sont indépendants, on a $P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \times P(R_2)$. De même, on a $P(R_1 \cap B_2) = P(R_1) \times P(B_2)$, d'où

$$\begin{aligned} P([X_2 = 1]) &= P(B_1) \times P(R_2) + P(R_1) \times P(B_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

b. Comme X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{9}$, on a $E(X_2) = p = \frac{4}{9}$ et $V(X_2) = p(1 - p) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$.

2. a. Les conditions de l'expérience juste avant le troisième tirage sont identiques à celles juste avant le deuxième tirage. Ainsi, la probabilité de recevoir un point au troisième tirage est égale à la probabilité de recevoir un point au deuxième tirage. Donc X_3 suit comme X_2 la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{4}{9}$.

b. On a $G = X_2 + X_3$. Par linéarité de l'espérance, il vient

$$E(G) = E(X_2) + E(X_3) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}.$$

3. a. On a

$$[X_2 = 1] \cap [X_3 = 1] = (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3).$$

Par incompatibilité puis indépendance, on obtient

$$\begin{aligned}
 P([X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) &= P(B_1) \times P(R_2) \times P(B_3) + P(R_1) \times P(B_2) \times P(R_3) \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.
 \end{aligned}$$

b. Par incompatibilité et indépendance, on a

$$\begin{aligned}
 P([X_2 = 0] \cap [X_3 = 0]) &= P(B_1) \times P(B_2) \times P(B_3) + P(R_1) \times P(R_2) \times P(R_3) \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
 P([X_2 = 0] \cap [X_3 = 1]) &= P(B_1) \times P(B_2) \times P(R_3) + P(R_1) \times P(B_2) \times P(B_3) \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 P([X_2 = 1] \cap [X_3 = 0]) &= P(B_1) \times P(R_2) \times P(R_3) + P(R_1) \times P(B_2) \times P(B_3) \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{2}{27} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.
 \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous donne la loi conjointe du couple (X_2, X_3) .

$X_3 \backslash X_2$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

On a

$$E(X_2 X_3) = 0 + 0 + 0 + \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

Donc

$$\text{Cov}(X_2, X_3) = E(X_2 X_3) - E(X_2)E(X_3) = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9} - \frac{16}{81} = \frac{18}{81} - \frac{16}{81} = \frac{2}{81}.$$

4. On a

$$\begin{aligned}
 V(G) = V(X_2 + X_3) &= V(X_2) + 2\text{Cov}(X_2, X_3) + V(X_3) \\
 &= \frac{20}{81} + 2 \times \frac{2}{81} + \frac{20}{81} \\
 &= \frac{44}{81}.
 \end{aligned}$$