

Planche d'exercices 4

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 1$.

- a. Calculer les images de 0, -2 et $\frac{1}{2}$ par f .
- b. Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f .

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

- a. Calculer les images de -1 , $\frac{1}{3}$ et $\sqrt{3}$ par f .
- b. Déterminer les antécédents éventuels de 1 par f .

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$.

- a. Expliquer pourquoi f est définie seulement sur $[1, +\infty[$.
- b. Calculer les images de 10, $\frac{13}{4}$ et $\frac{3}{2}$.
- c. Déterminer les antécédents éventuels de -1 par f .

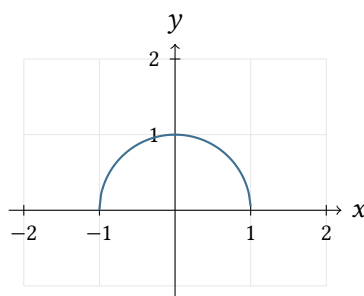
★ **Exercice 4** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

- a. Expliquer pourquoi f n'est pas définie en 1.
- b. Calculer les images de 4, $\frac{5}{4}$ et $-\frac{1}{3}$ par f .
- c. Montrer que $f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$.
- d. Déterminer les antécédents éventuels de 3 par f .

★ **Exercice 5** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

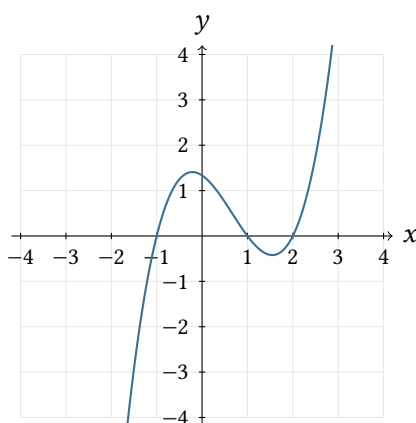
- a. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- b. Calculer les images de -3 , $-\frac{2}{3}$ et $2\sqrt{5}$.
- c. Montrer que $f(2 + \sqrt{3}) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.
- d. Montrer que 5 n'a pas d'antécédent par f .

Exercice 6 Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe d'une fonction f définie sur $[-1, 1]$.



- a. Déterminer graphiquement l'image de 0 par f .
- b. Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f .

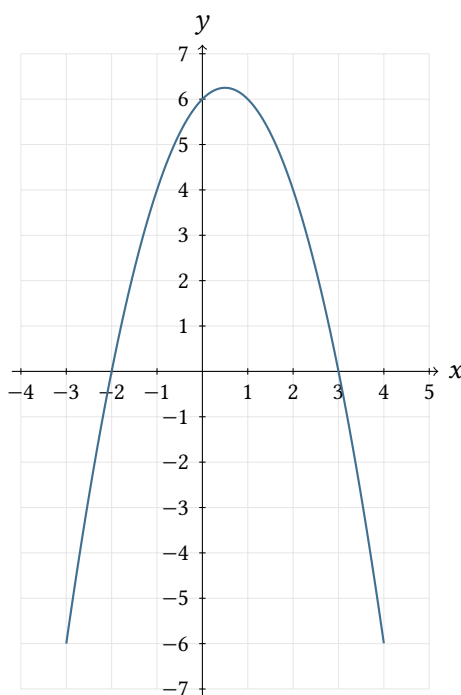
Exercice 7 Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Dans chacun des cas ci-dessous, par lecture graphique, dire si la proposition est vraie ou fausse.

- L'image de 1 par f est 0.
- Le réel 0 ne possède qu'un seul antécédent par f .
- L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution.
- Pour tout réel x de $[-1, 1]$, on a $f(x) \geq 0$.
- Il existe un réel x de $[1, 2]$ tel que $f(x) > 0$.

Exercice 8 Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe d'une fonction f définie sur $[-3, 4]$.



- Lectures graphiques.*
 - Déterminer graphiquement l'image de 2 par f .
 - Déterminer graphiquement $f(-2)$.
 - Déterminer graphiquement les antécédents de 6 par f .
 - Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
 - Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.
- Calculs algébriques.* On donne maintenant une expression algébrique de la fonction f représentée ci-dessus : f est définie sur $[-3, 4]$ par $f(x) = -x^2 + x + 6$.

- a. Calculer l'image de 2 par f .
- b. Calculer $f(-2)$.
- c. Déterminer algébriquement les antécédents de 6 par f .
- d. Vérifier que pour tout x de $[-3, 4]$, on a $f(x) = (3 - x)(x + 2)$, puis résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 0$.
- e. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 9 Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la parité de la fonction f .

- a. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5$.
- b. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2}{x}$.
- c. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.
- d. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{|x|}$.
- e. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 7x^3 + 4x + 2$.
- f. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$.

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$. Montrer que f est majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$.

- a. Montrer que f est minorée par 2 sur $] -1, +\infty[$.
- b. Que peut-on dire de f sur $] -\infty, -1[$?

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 4$. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

★ **Exercice 14** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

- a. Montrer que pour tous réels a et b , on a

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$\text{puis que } a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

- b. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 Compléter les relations ci-dessous avec $<$ ou $>$.

- a. $23^2 \dots 24^2$
- b. $(-79)^2 \dots (-78)^2$
- c. $984^2 \dots 977^2$
- d. $(-153)^2 \dots (-161)^2$

Exercice 16 Soit f la fonction carré. Compléter les relations ci-dessous avec $<$ ou $>$.

- a. $f(34) \dots f(35)$
- b. $f(-91) \dots f(-90)$
- c. $f(742) \dots f(736)$
- d. $f(-409) \dots f(-413)$

Exercice 17

- a. Soit x un réel inférieur ou égal à -5 . Que peut-on dire de x^2 ?
- b. Soit x un réel compris entre -3 et -2 . Encadrer x^2 par deux réels.
- c. Soit x un réel compris entre 0 et 1. Encadrer $-3x^2 + 4$.

Exercice 18 Compléter les relations ci-dessous avec $<$ ou $>$.

- a. $17^3 \dots 18^3$
- b. $(-47)^3 \dots (-46)^3$
- c. $257^3 \dots 250^3$
- d. $(-604)^3 \dots (-611)^3$

Exercice 19 Soit f la fonction cube. Dans chacun des cas ci-dessous, comparer les deux réels donnés.

- a. $f(29) \dots f(30)$
- b. $f(-55) \dots f(-54)$
- c. $f(230) \dots f(221)$
- d. $f(-873) \dots f(-882)$

Exercice 20

- a. Soit x un réel strictement supérieur à -2 . Que peut-on dire de x^3 ?
- b. Soit x un réel compris entre -1 et 3 . Encadrer x^3 par deux réels.
- c. Soit x un réel compris entre 1 et 2 . Encadrer $2x^3 - 5$.

Exercice 21 Compléter les relations ci-dessous avec $<$ ou $>$.

- a. $\frac{1}{62} \cdots \frac{1}{63}$
- b. $\frac{1}{-54} \cdots \frac{1}{-53}$
- c. $\frac{1}{774} \cdots \frac{1}{760}$
- d. $\frac{1}{-502} \cdots \frac{1}{-536}$

Exercice 22 Soit f la fonction inverse. Compléter les relations ci-dessous avec $<$ ou $>$.

- a. $f(8) \cdots f(9)$
- b. $f(-41) \cdots f(-40)$
- c. $f(352) \cdots f(336)$
- d. $f(-127) \cdots f(-131)$

Exercice 23

- a. Soit x un réel supérieur ou égal à 1 . Que peut-on dire de $\frac{1}{x}$?
- b. Soit x un réel compris entre 2 et 5 . Encadrer $\frac{1}{x}$ par deux réels.
- c. Soit x un réel compris entre -2 et -1 . Encadrer $\frac{1}{1-3x}$.

Exercice 24 Soient f la fonction carré, g la fonction cube, h la fonction inverse, u la fonction racine carrée et v la fonction valeur absolue. Compléter les relations ci-dessous avec $<$ ou $>$.

- a. $f(-8) \cdots f(-5)$
- b. $g(-14) \cdots g(7)$
- c. $h(-2) \cdots h(1)$
- d. $u(42) \cdots u(43)$
- e. $v(-12) \cdots v(-11)$
- f. $f(55) \cdots f(-64)$
- g. $g(131) \cdots g(123)$
- h. $h(44) \cdots h(35)$
- i. $u(251) \cdots u(242)$
- j. $v(98) \cdots v(-99)$

Exercice 25 Soit x un réel compris entre 1 et 2 . Encadrer les expressions ci-dessous.

- a. $\sqrt{x^3 + 1}$
- b. $|2x - 9|$
- c. $\frac{1}{1 + x^2}$