

Chapitre 4 — Fonctions

1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Définition 1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Une *fonction* f définie sur A est un objet mathématique qui à chaque réel x de A associe un et un seul réel noté $f(x)$. Le réel $f(x)$ est appelé l'*image* de x par f . On dit aussi que x est un *antécédent* de $f(x)$ par f .

Le plus souvent, la partie A est un intervalle ou une union d'intervalles.

Un réel de A ne possède qu'une seule image par f . En revanche, un réel peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

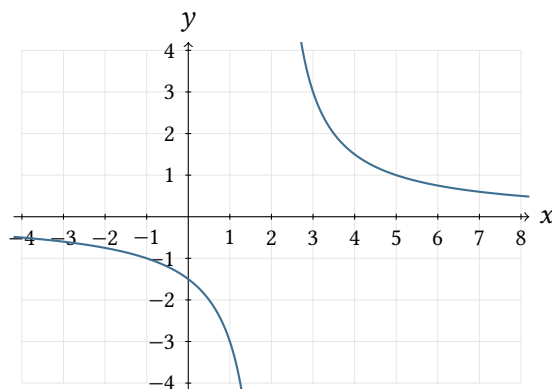
Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{3}{x-2}$.

- Expliquer pourquoi f n'est pas définie en 2.
- Calculer l'image de 1 par f .
- Déterminer les antécédents éventuels de 1 par f .

2 Courbe d'une fonction

Définition 2 Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. On appelle *courbe* de f l'ensemble des points du plan ayant pour coordonnées (x, y) , où x appartient à A et y est l'image de x . Cet ensemble est aussi appelé la *courbe d'équation* $y = f(x)$.

Exemple 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{3}{x-2}$. Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe de f .



- Déterminer graphiquement l'image de 1 par f .
- Déterminer graphiquement les antécédents éventuels de 1 par f .

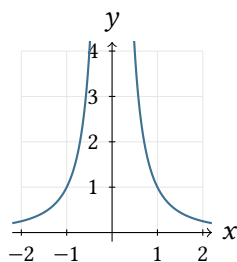
3 Parité

Définition 3 Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. On dit que

- f est *paire* lorsque pour tout réel x de A , le réel $-x$ est dans A et $f(-x) = f(x)$;
- f est *impaire* lorsque pour tout réel x de A , le réel $-x$ est dans A et $f(-x) = -f(x)$.

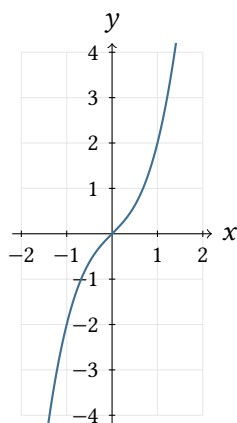
La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0,0)$.

Exemple 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.



Montrer que f est paire.

Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.



Montrer que f est impaire.

4 Majoration, minoration

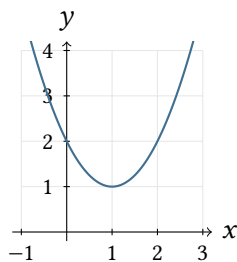
Définition 4 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est

- *majorée* par un réel M sur I lorsque pour tout x de I , on a $f(x) \leq M$;
- *minorée* par un réel m sur I lorsque pour tout x de I , on a $f(x) \geq m$;
- *bornée* sur I lorsque f est majorée et minorée sur I .

La courbe d'une fonction majorée par M est située en-dessous ou sur la droite horizontale d'équation $y = M$. La courbe d'une fonction minorée par m est située au-dessus ou sur la droite horizontale d'équation $y = m$. La courbe d'une fonction bornée est située entre deux droites horizontales.

Pour montrer, par exemple, que f est minorée par m sur I , une méthode efficace consiste à calculer, pour tout x de I , la différence $f(x) - m$, puis à montrer que le résultat est toujours positif.

Exemple 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.



Montrer que f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

5 Signe

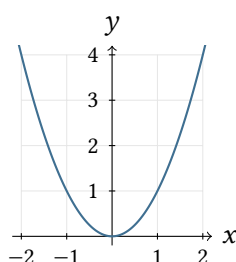
Définition 5 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est

- *positive* sur I lorsque pour tout x de I , on a $f(x) \geq 0$;
- *strictement positive* sur I lorsque pour tout x de I , on a $f(x) > 0$;
- *négative* sur I lorsque pour tout x de I , on a $f(x) \leq 0$;
- *strictement négative* sur I lorsque pour tout x de I , on a $f(x) < 0$.

Autrement dit : f est positive sur I lorsque f est minorée par 0 sur I ; f est négative sur I lorsque f est majorée par 0 sur I .

La courbe d'une fonction positive est située au-dessus ou sur l'axe des abscisses. La courbe d'une fonction négative est située en dessous ou sur l'axe des abscisses.

Exemple 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.



La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas strictement positive.

6 Variations

Définition 6 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est

- *croissante* sur I lorsque pour tous a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$;
- *strictement croissante* sur I lorsque pour tous a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$;
- *décroissante* sur I lorsque pour tous a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$;
- *strictement décroissante* sur I lorsque pour tous a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$;
- *monotone* sur I lorsque f est croissante ou décroissante sur I ;
- *strictement monotone* sur I lorsque f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .

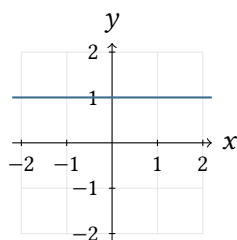
Exemple 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

7 Fonctions de référence

Fonctions constantes

Définition 7 Soit k un réel. La *fonction constante* de valeur k est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$.

Exemple 8 La fonction constante de valeur 1 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$.

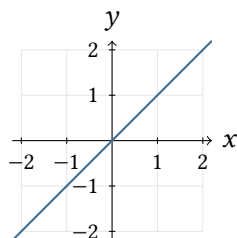


Proposition 1 Toute fonction constante est paire.

Proposition 2 Toute fonction constante est à la fois croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$, mais n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante.

Fonction identité

Définition 8 La *fonction identité* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.



Proposition 3 La fonction identité est impaire.

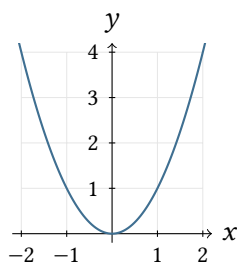
Proposition 4 La fonction identité est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Fonction carré

Définition 9 La *fonction carré* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Proposition 5 La fonction carré est paire.

Proposition 6 La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

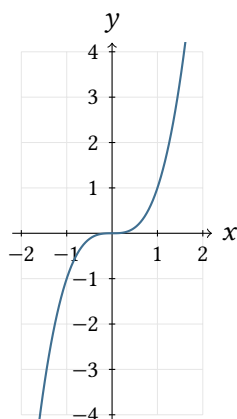


Fonction cube

Définition 10 La *fonction cube* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Proposition 7 La fonction cube est impaire.

Proposition 8 La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

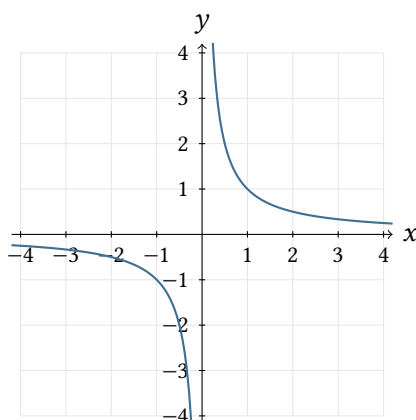


Fonction inverse

Définition 11 La *fonction inverse* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 9 La fonction inverse est impaire.

Proposition 10 La fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $] 0, +\infty[$.

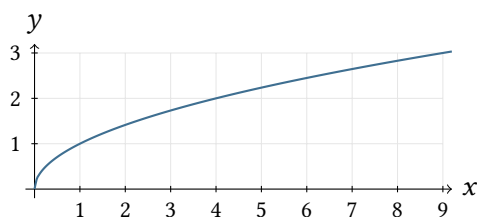


Fonction racine carrée

Définition 12 La *fonction racine carrée* est la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Proposition 11 La fonction racine carrée n'est ni paire, ni impaire.

Proposition 12 La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.



Fonction valeur absolue

Définition 13 La *fonction valeur absolue* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Proposition 13 La fonction valeur absolue est paire.

Proposition 14 La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

