

Chapitre 3 — Équations et inéquations

1 Quelques notions sur les ensembles

Définition 1 Un *ensemble* est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les *éléments* de l'ensemble.

Exemple 1 L'ensemble qui contient les nombres 0, 1 et 2 est noté $\{0, 1, 2\}$. C'est un ensemble fini.

Exemple 2 Une courbe est un ensemble de points. C'est un ensemble infini.

Les ensembles de nombres usuels sont :

- l'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$;
- l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$;
- l'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$;
- l'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$.

Définition 2 Soit E un ensemble. La notation $a \in E$ signifie que a est un élément de E , tandis que $b \notin E$ signifie que b n'est pas un élément de E .

Exemple 3 Soit $E = \{0, 1, 2\}$. On a $2 \in E$ et $3 \notin E$.

Exemple 4

$$-3 \notin \mathbb{N}, \quad -3 \in \mathbb{Z}, \quad -3 \in \mathbb{Q}, \quad -3 \in \mathbb{R}.$$

Définition 3 On dit qu'un ensemble A est une *partie* d'un ensemble E et on note $A \subset E$ lorsque tout élément de A est aussi un élément de E .

Exemple 5 Soit $E = \{0, 1, 2\}$. L'ensemble $\{0, 2\}$ est une partie de E , ce que l'on note $\{0, 2\} \subset E$. Voici la liste de toutes les parties de E :

$$\emptyset, \quad \{0\}, \quad \{1\}, \quad \{2\}, \quad \{0, 1\}, \quad \{0, 2\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{0, 1, 2\}.$$

Exemple 6

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2 Opérations sur les ensembles

Définition 4 Soient A et B deux ensembles.

- L'*intersection* de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ des éléments qui appartiennent à A et à B .
- L'*union* de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ des éléments qui appartiennent à A ou à B .

Le ou est inclusif : un élément qui appartient aux deux ensembles appartient également à leur union.

Exemple 7 Soient $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{c, d, e\}$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Définition 5 Soient E un ensemble et A une partie de E . Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble noté $E \setminus A$ des éléments qui appartiennent à E mais pas à A .

Exemple 8 Soient $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $A = \{2, 3, 5, 7\}$. Déterminer $E \setminus A$.

3 Intervalles

Certaines parties de $\mathbb{R}$, appelées *intervalles*, vont jouer un rôle important dans les prochains chapitres.

Définition 6 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note

- $[a, b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.
- $]a, b[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.
- $[a, b[$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$.
- $]a, b]$ l'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$.
- $[a, +\infty[$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x$.
- $]a, +\infty[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x$.
- $]-\infty, b]$ l'ensemble des réels x tels que $x \leq b$.
- $]-\infty, b[$ l'ensemble des réels x tels que $x < b$.

On note aussi $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Les intervalles du type $[a, b]$ sont dits *fermés*. Ceux du type $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, +\infty[$ sont dits *ouverts*. Les autres sont dits *semi-ouverts*.

Exemple 9 Écrire l'ensemble des réels x tels que $1 < x \leq 2$ sous forme d'intervalle.

Exemple 10 Compléter les relations ci-dessous avec $\in$ ou $\notin$.

a. $\frac{5}{4} \dots]1, +\infty[$

b. $1 \dots]1, +\infty[$

c. $10^9 \dots]1, +\infty[$

4 Qu'est-ce qu'une équation ?

Définition 7 Une *équation* d'inconnue x est une égalité pouvant être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres. Une *solution* de l'équation est une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie.

Exemple 11 On considère l'équation $4x - 1 = x + 5$, d'inconnue x .

- Est-ce que 1 est une solution de l'équation ?
- Est-ce que 2 est une solution de l'équation ?

Définition 8 *Résoudre* une équation d'inconnue x dans un ensemble de nombres E , c'est trouver toutes les solutions x appartenant à E .

Exemple 12 Résoudre l'équation $4x - 1 = x + 5$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, c'est trouver toutes les solutions x appartenant à $\mathbb{R}$.

Définition 9 On dit que deux équations, de même inconnue x dans E , sont *équivalentes* lorsqu'elles ont exactement les mêmes solutions.

Reformulons : une équation 1 et une équation 2 sont équivalentes lorsque pour tout x de E ,

- si x est une solution de l'équation 1, alors x est une solution de l'équation 2 ;
- si x est une solution de l'équation 2, alors x est une solution de l'équation 1.

Ces deux conditions peuvent être résumées en une seule : x est une solution de l'équation 1 *si et seulement si* x est une solution de l'équation 2.

La rédaction est la suivante :

pour tout $x \in E$, on a

$$\text{équation 1} \iff \text{équation 2}.$$

Proposition 1

- Si l'on ajoute (ou soustrait) un même réel aux deux membres d'une équation, alors on obtient une équation équivalente.
- Si l'on multiplie (ou divise) par un même réel *non nul* les deux membres d'une équation, alors on obtient une équation équivalente.

Exemple 13 Résolvons l'équation $x - 2 = 3$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x - 2 = 3 &\iff x - 2 + 2 = 3 + 2 \\ &\iff x = 5. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $x - 2 = 3$ admet une unique solution qui est 5.

Exemple 14 Résolvons l'équation $4x = 6$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 4x = 6 &\iff \frac{4x}{4} = \frac{6}{4} \\ &\iff x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $4x = 6$ admet une unique solution qui est $\frac{3}{2}$.

Exemple 15 Résoudre l'équation $4x - 1 = x + 5$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

5 Différents types d'équations

Équations du premier degré

Une équation du premier degré est une équation dans laquelle l'inconnue x apparaît seulement à la puissance 1 (on rappelle que $x^1 = x$). Dans ce type d'équations, on ne rencontre pas de x^2 , de x^3 , de $\sqrt{x}$ ou de $\frac{1}{x}$.

Exemple 16 L'équation $4x - 1 = x + 5$, d'inconnue x , est une équation du premier degré.

Pour résoudre une telle équation, il suffit d'isoler x dans l'un des deux membres de l'équation.

Équations produit nul

Une équation produit nul est une équation dont l'un des membres est un produit de facteurs et l'autre membre 0.

Exemple 17 L'équation $(x - 1)(2x + 8) = 0$, d'inconnue x , est une équation produit nul.

Proposition 2 Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Exemple 18 Résoudre l'équation $(x - 1)(2x + 8) = 0$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

Équations quotient nul

Une équation quotient nul est une équation dont l'un des membres est un quotient et l'autre membre 0.

Proposition 3 Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

Attention aux valeurs interdites ! Elles ne peuvent être solutions.

Exemple 19 Résoudre l'équation $\frac{-2x+6}{x-3} = 0$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

6 Qu'est-ce qu'une inéquation ?

Définition 10 Une *inéquation* d'inconnue x est une inégalité pouvant être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres. Une *solution* de l'inéquation est une valeur de x pour laquelle l'inégalité est vraie.

Exemple 20 On considère l'inéquation $-2x + 6 \geq 0$, d'inconnue x . Donner plusieurs solutions de l'inéquation.

Définition 11 Résoudre une inéquation d'inconnue x dans un ensemble de nombres E , c'est trouver toutes les solutions x appartenant à E .

Exemple 21 Résoudre l'inéquation $-2x + 6 \geq 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, c'est trouver toutes les solutions appartenant à $\mathbb{R}$.

Définition 12 On dit que deux inéquations, de même inconnue x dans E , sont *équivalentes* lorsqu'elles ont exactement les mêmes solutions.

Proposition 4

- Si l'on ajoute (ou soustrait) un même réel aux deux membres d'une inéquation, alors on obtient une inéquation équivalente.
- Si l'on multiplie (ou divise) par un même réel *strictement positif* les deux membres d'une inéquation, alors on obtient une inéquation équivalente.
- Si l'on multiplie (ou divise) par un même réel *strictement négatif* les deux membres d'une inéquation, alors on obtient une inéquation équivalente à condition de renverser le sens de l'inégalité.

Exemple 22 Résoudre l'inéquation $-2x + 6 \geq 0$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

7 Différents types d'inéquations

Inéquations du premier degré

Exemple 23 L'inéquation $-2x + 6 \geq 0$, d'inconnue x , est une inéquation du premier degré.

Pour résoudre une telle inéquation, il suffit d'isoler x dans l'un des deux membres de l'inéquation.

Inéquations produit

Commençons par quelques rappels sur les tableaux de signes.

L'expression algébrique $ax + b$, où x est la variable, a un réel non nul et b un réel, s'appelle un *binôme du premier degré*.

Pour tout réel x , on a

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}.$$

Ainsi, le binôme s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$.

Pour tout réel x , on a

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff \dots$$

Pour conclure, il faut connaître le signe de a ! Dans le cas où a est strictement positif, on obtient $x > -\frac{b}{a}$.

Dans le cas où a est strictement négatif, on obtient $x < -\frac{b}{a}$.

Proposition 5 Soient a un réel non nul et b un réel. Le tableau suivant résume le signe de $ax + b$ selon les valeurs de x :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Exemple 24 Dresser le tableau de signes du binôme $4x - 12$.

Exemple 25 Dresser le tableau de signes du binôme $-x + 5$.

Passons à la résolution des inéquations produit. Rappelons la règle des signes : le produit de deux réels de même signe est un réel positif ; le produit de deux réels de signes opposés est un réel négatif.

Exemple 26 Résoudre l'inéquation $(x - 3)(-2x + 1) > 0$.

Inéquations quotient

On utilise là aussi un tableau de signes.

Exemple 27 Résoudre l'inéquation $\frac{2-x}{-x+1} \geq 0$.