

Chapitre 1 — Calcul numérique

1 Différents types de nombres

Les nombres *entiers naturels* sont

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Les nombres *entiers relatifs* sont les entiers naturels et leurs opposés :

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

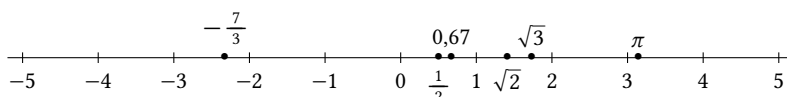
Les nombres *rationnels* sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs, comme par exemple

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{7}{3} = \frac{-7}{3}, \quad 42 = \frac{42}{1}, \quad 0,67 = \frac{67}{100}.$$

Les nombres qui ne sont pas *rationnels* sont dits *irrationnels*. Dans cette catégorie, on trouve

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \pi.$$

Les nombres *réels* sont les nombres rationnels ou irrationnels. Ils correspondent aux points d'un axe gradué.



Les réels *positifs* sont situés à droite de 0, tandis que les réels *négatifs* sont situés à gauche de 0. Le nombre 0 est à la fois positif et négatif.

Les réels sont *ordonnés*. On dit que a est *inférieur ou égal* à b et on note $a \leq b$ lorsque $b - a$ est positif. De manière équivalente, on dit que b est *supérieur ou égal* à a et on note $b \geq a$.

On dit que a est *strictement inférieur* à b et on note $a < b$ lorsque $a \leq b$ et $a \neq b$.

Exemple 1

$$3 \leq 4, \quad 3 < 4, \quad 2 \leq 2.$$

2 Opérations sur les réels

Les deux opérations de base que l'on peut effectuer entre deux réels sont l'addition $+$ et la multiplication $\times$. Le résultat d'une addition s'appelle une *somme*, tandis que le résultat d'une multiplication s'appelle un *produit*.

Exemple 2

- $3 + 5 = 8$. Le nombre 8 est la somme de 3 et 5.
- $4 \times 6 = 24$. Le nombre 24 est le produit de 4 et 6.

Proposition 1

- L'addition est *associative*, la multiplication aussi : pour tous réels a, b et c , on a $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- L'addition est *commutative*, la multiplication aussi : pour tous réels a et b , on a $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$.
- La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition : pour tous réels a, b et c , on a $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ et $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

Exemple 3

- $(5 + 8) + 3 = 5 + (8 + 3)$ et $(4 \times 2) \times 3 = 4 \times (2 \times 3)$.
- $7 + 4 = 4 + 7$ et $5 \times 2 = 2 \times 5$.
- $2 \times (3 + 7) = 2 \times 3 + 2 \times 7$ et $(4 + 5) \times 3 = 4 \times 3 + 5 \times 3$.

Proposition 2

- Le nombre 0 est *neutre* pour l'addition : pour tout réel a , on a $a + 0 = a$.
- Tout réel a possède un *opposé*, noté $-a$: $a + (-a) = 0$.

Exemple 4

- $3 + 0 = 3$.
- L'opposé de 4 est -4 . On a $4 + (-4) = 0$.

Définition 1 Soient a et b deux réels. La *soustraction* de a par b est définie de la façon suivante :

$$a - b = a + (-b).$$

Le résultat d'une soustraction est une *différence*.

Exemple 5 On a $7 - 4 = 7 + (-4)$.

Proposition 3

- Le nombre 1 est *neutre* pour la multiplication : pour tout réel a , on a $1 \times a = a$.
- Tout réel a non nul possède un *inverse*, noté $\frac{1}{a}$: $a \times \frac{1}{a} = 1$.

Exemple 6

- $1 \times 5 = 5$.
- L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$. On a $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

Définition 2 Soient a un réel et b un réel non nul. La *division* de a par b est définie de la façon suivante :

$$a : b = a \times \frac{1}{b}.$$

La plupart du temps, le nombre $a : b$ est noté sous la forme d'une écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$, où a est le numérateur et b le dénominateur.

Le résultat d'une division est un *quotient*.

Exemple 7 $3 : 2 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.

3 Calcul fractionnaire

Proposition 4 Soient a, b, c trois réels. On suppose que b et c sont non nuls. On a

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

Exemple 8 $\frac{10}{6} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{3}$.

Proposition 5 Soient a, b, c trois réels. On suppose que c est non nul. On a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

Exemple 9 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$

Proposition 6 Soient a, b, c et d quatre réels. On suppose que b et d sont non nuls. On a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Exemple 10 $\frac{4}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{4 \times 2}{3 \times 7} = \frac{8}{21}.$

Cas particulier important : $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{1 \times d} = \frac{a \times c}{d}.$

Exemple 11 $5 \times \frac{3}{8} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{8} = \frac{5 \times 3}{1 \times 8} = \frac{15}{8}.$

Proposition 7 Soient a et b deux réels. On suppose que b est non nul. L'opposé de $\frac{a}{b}$ est

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Exemple 12 L'opposé de $\frac{3}{4}$ est $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4}.$

Proposition 8 Soient a et b deux réels. On suppose que a et b sont non nuls. L'inverse de $\frac{a}{b}$ est

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Autrement dit : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$

Exemple 13 L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$ Ceci revient à dire que $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1.$

Cas particulier important : l'inverse de $\frac{1}{b}$ est $\frac{b}{1} = b.$

Exemple 14 L'inverse de $\frac{1}{3}$ est $\frac{3}{1} = 3.$

Proposition 9 Soient a, b, c et d quatre réels. On suppose que b, c et d sont non nuls. On a

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemple 15 $\frac{5}{4} : \frac{2}{9} = \frac{5}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{5 \times 9}{4 \times 2} = \frac{45}{8}.$

4 Puissances

Définition 3 Soient a un réel et n un entier naturel non nul. On appelle *puissance n -ième* de a et on note a^n le nombre $a \times a \times \dots \times a$, cette dernière expression comportant n facteurs. Par ailleurs, on pose $a^0 = 1.$

Exemple 16 $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Cas particulier important : $a^1 = a$.

Exemple 17 $7^1 = 7$.

Définition 4 Soient a un réel non nul et n un entier naturel non nul. On note a^{-n} l'inverse de a^n , c'est-à-dire le nombre $\frac{1}{a^n}$.

Exemple 18 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Cas particulier important : $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Exemple 19 $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Proposition 10 Soient a un réel non nul et n, m deux entiers relatifs. On a

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$;
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$.

Exemple 20

- $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$.
- $\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$.
- $(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$.

Proposition 11 Soient a, b deux réels non nuls et n un entier relatif. On a

- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Exemple 21

- $(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2$.
- $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3}$.

5 Racines carrées

Définition 5 Soit a un réel positif. On appelle *racine carrée* de a et on note $\sqrt{a}$ l'unique réel positif dont le carré est égal à a .

Ainsi :

- la racine carrée d'un réel strictement négatif n'est pas définie (le nombre $\sqrt{-1}$ n'existe pas) ;
- la racine carrée d'un réel positif est bien définie ; de plus, il s'agit d'un réel positif.

Exemple 22 $\sqrt{36} = 6$.

Il est utile de bien avoir en tête la liste des *carrés parfaits* : $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$.

Proposition 12

- Pour tout réel a positif, on a $(\sqrt{a})^2 = a$.
- Pour tout réel a , on a $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$

Exemple 23

- $(\sqrt{3})^2 = 3$.
- $\sqrt{8^2} = 8$ et $\sqrt{(-9)^2} = 9$.

Proposition 13

- Pour tous réels positifs a et b , on a $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Pour tout réel positif a et pour tout réel strictement positif b , on a $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 24

- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2}$.
- $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

On peut rencontrer des écritures fractionnaires comportant des racines carrées. En général, il est souhaitable de se débarrasser des racines carrées au dénominateur (cela dépend du contexte).

Exemple 25 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6 Valeur absolue

Définition 6 Soit a un réel. On appelle *valeur absolue* de a et on note $|a|$ le réel défini par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Ainsi, la valeur absolue d'un réel est un réel positif.

Exemple 26

- $|3| = 3$.
- $|-4| = -(-4) = 4$.

Proposition 14 Pour tout réel a , on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple 27 $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$.

Proposition 15

- Pour tous réels a et b , on a $|a \times b| = |a| \times |b|$.
- Pour tout réel a et pour tout réel b non nul, on a $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Exemple 28

- $|-2 \times 8| = |-2| \times |8| = 2 \times 8 = 16$.
- $\left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{|4|}{|-3|} = \frac{4}{3}$.